Nro: 30.
Math. P. 744
56
K. 1 20

K, b 20

Nro: 30.
Math. P. 744
56
K.1.20

K, b 20

H 136 R.b 20.

Joseph Spenglers

weiland öffentl. Lehrers der Mathematik auf der hohen Schule zu Dillingen.

Erste Gründe der Arithmetik und Algebra.

Neunte durchgesehene Auflage

von

Andreas Christian Mayer.

Augsburg,

in der Martin Veith und Michael Riegerschen Buchhandlung.

1809.

Gd 169/523

Bayerische
Staatsbibliothek
München

1
11
4
9

3
Copy

Inhalt
des ersten Theils der Rechenkunst.

Erster Abschnitt. Von den vorzüglichen Eigenschaften der Zahlen. §. 1. — §. 13.

Zweyter Abschnitt. Von der Vermehrung in ungenannten Zahlen durch die Addition. §. 14. — §. 16.

Dritter Abschnitt. Von der Vermehrung in ungenannten Zahlen durch die Multiplication. §. 17. — §. 23.

Vierter Abschnitt. Von der Verminderung der ungenannten Zahlen durch die Subtraction. §. 24. — §. 28.

Fünfter Abschnitt. Von der Verminderung der ungenannten Zahlen durch die Division. §. 29. — §. 33.

Sechster Abschnitt. Von den Brüchen und Rechnungsarten mit Brüchen. §. 34. — §. 57.

Siebenter Abschnitt. Von den Rechnungsarten in genannten Zahlen.

I. Durch die Addition. §. 58.

II. Durch die Subtraction. §. 59.

III. Durch die Multiplication. §. 60.

IV. Durch die Division. §. 61.

Achter Abschnitt. Von den Verhältnissen und Proportionen. §. 62. — §. 80.

Neunter Abschnitt. Von der Regel De = tri überhaupt. §. 81. — §. 89.

Zehnter Abschnitt. Von der einfachen Regel De = tri. §. 90. — §. 91.

Eilfter Abschnitt. Von der zusammengesetzten Regel De = tri. §. 92. — §. 99.

Zwölfter

Zwölfter Abschnitt. Von den Quadratzahlen und Ausziehung der Quadratwurzel. §. 100. — §. 116.
Dreyzehnter Abschnitt. Von den Cubiczahlen und Ausziehung der Cubicwurzel. §. 117. — §. 125.
Vierzehnter Abschnitt. Von der Decimal-Rechnung. §. 126. — §. 141.

Des zweyten Theils der Algebra.

Erster Abschnitt. Von den Größen. §. 1. — §. 9.
Zweyter Abschnitt. Von den vier Rechnungsarten mit ganzen Größen. §. 10. — §. 23.
Dritter Abschnitt. Von den Brüchen. §. 24. — §. 34.
Vierter Abschnitt. Von den Quadratzahlen, von Ausziehung der Wurzel und von den Irrational-Größen §. 35. — §. 48.
Fünfter Abschnitt. Von den Proportionen und Progressionen. §. 49. — §. 89.
Sechster Abschnitt. Von den algebraischen Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe. §. 90. — §. 103.
Siebenter Abschnitt. Von den algebraischen Gleichungen vom zweyten Grade mit einer unbekannten Größe. §. 104. — §. 105.
Achter Abschnitt. Von den algebraischen Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen. §. 106. — §. 114.
Neunter Abschnitt. Wie die algebraischen Gleichungen zu finden sind. §. 115. — §. 116.

Des

Des ersten Theiles erster Abschnitt.

Von den vorzüglichsten Eigenschaften der Zahlen.

§. 1.

Die Rechenkunst ist diejenige Wissenschaft, welche sich mit der Vergleichung verschiedener Zahlen beschäftiget, und zugleich diejenigen Regeln vorschreibt, nach welchen man aus gegebenen bekannten Zahlen andere unbekannte Zahlen finden kann.

§. 2.

Ein gewißes Ganze, das man entweder selbst, oder dessen Theile man mehrmals zusammenzählt, heißt eine Einheit.

 §. 3.

§. 3.

Eine Menge ganzer Einheiten nennet man eine ganze Zahl: hingegen eine Menge gleichgroßer Theile der Einheiten eine gebrochene Zahl oder einen Bruch.

§. 4.

Eine abstrakte oder ungenannte Zahl ist diejenige Zahl, bey der die besondere Beschaffenheit der zusammengezählten Einheiten gar nicht in Betrachtung kommt; eine concrete oder genannte Zahl hingegen eine solche, welche eine gewisse Menge von Einheiten einer gewissen Art ausdrückt.

Zum Exempel. Die Zahl fünf überhaupt ist eine ungenannte Zahl; hingegen fünf Pfund eine genannte Zahl.

§. 5.

Diejenigen Zeichen, welche man statt der gewöhnlichen Worte gebraucht, die Zahlen dadurch auszudrücken, werden Ziffern genannt. Diese Zeichen der Zahlen sind folgende:

1.	2.	3.	4.	5.	6.
Eins.	Zwey.	Drey.	Vier.	Fünf.	Sechs.

7.	8.	9.	0.
Sieben.	Acht.	Neun.	Null.

§. 6.

Die Null an und vor sich, oder wenn dieselbe allein steht, bedeutet nichts, und wird nur gebraucht, um eine leere Stelle auszufüllen, in welcher keine andere Ziffer steht, damit man durchaus die Stellen der übrigen Ziffern in einer Reihe erkennen, und darnach ihre Bedeutungen bestimmen könne.

§. 7.

Die Regel, wie man durch die geschriebene Ziffern sich ausdrücket, was man bey den Worten beobachtet, ist folgende:

Man schreibe die Ziffern von der rechten Hand gegen die linke Hand, und lasse jede Ziffer in der nächst folgenden Stelle zehnmal mehr bedeuten, als in der nächst vorhergehenden. In die Stellen, welche ledig bleiben müssen, setze man die sogenannte Null.

Das nachstehende Exempel wird diese Regel gleichsam handgreiflich erklären und auseinander setzen.

Zum Exempel.

in der ersten Stelle	eins	1.
— — zweyten	zehen	10.
— — dritten	hundert	100.
— — vierten	tausend	1000.
— — fünften	zehentausend	10000.
— — sechsten	hunderttausend	100000.
— — siebenten	eine Million	1000000.
— — achten	zehen Millionen	10000000.
— — neunten	hundert Millionen	100000000.
— — zehnten	tausend Millionen	1000000000.
— — eilften	zehntausend Millionen	10000000000.
— — zwölften	hunderttausend Millionen	100000000000.
— — dreyzehnten	eine Billion.	1000000000000.

§. 8.

Unter dem Worte Numeriren versteht man nichts anders, als eine in Ziffern geschrie-

bene

bene Zahl mit Worten aussprechen, oder eine ausgesprochene Zahl mit geschriebenen Ziffern anzeigen.

§. 9.

Eine jede Zahl, die mit Ziffern geschrieben ist, mit Worten auszusprechen.

Auflösung.

Ist die geschriebene Zahl sehr groß, so theile man

1) die Ziffern von der rechten Hand gegen die linke in Classen, und gebe jeder Classe sechs Ziffern, da es denn gleich viel ist, wie viel Ziffern die letzte Classe zur linken Hand bekommt.

2) Oberwärts an der siebenten Ziffer setze man einen Strich (′) an der dreyzehenten zwey Striche (″) an der neunzehnten drey Striche (‴) an der fünf und zwanzigsten vier Striche (⁗) u. s. w.

3) Spreche man, wo ein Strich steht, für Millionen, wo zwey Striche stehen, für Billionen, drey Striche für Trillionen, vier Striche für Quadrillionen u. s. w. aus, und alle übrige gegen die rechte Hand zu liegende Ziffern nach der im §. 7. vorgeschriebenen Regel aus.

Zum Exempel.

3'''405621''543021'230567

diese Zahl muß demnach also ausgesprochen werden:

Drey Trillionen, viermalhundert fünftausend sechshundert ein und zwanzig Billionen, fünfmalhundert drey und vierzigtausend ein und zwanzig Millionen, zweymalhundert dreyßigtausend fünfhundert sieben und sechszig.

§. 10.

Eine Zahl, die mit Worten ausgesprochen worden ist, mit Ziffern gehörig zu schreiben.

Auflösung. Man habe ausgesprochen:

Dreymalhundert acht und fünfzig Billionen, viermalhundert ein und zwanzigtausend neunhundert sieben und sechszig Millionen, fünfmalhundert acht und vierzigtausend dreyhundert ein und zwanzig, so mache man

1) auf dem Papier so viele Abtheilungen durch Striche, zwischen welche man je sechs Ziffer in einer Reihe schreiben könne, als die ausgesprochene Zahl erfordert; nämlich, wenn dieselbe nur Millionen enthält, einen Strich; enthält dieselbe aber Billionen zwey Striche, wie im vorgegebenen Falle u. s. w.

2) Schrei-

2) Schreibe man jede ausgesprochene Zahl in die gehörige Stelle von der linken gegen die rechte Hand; die leer gebliebenen Stellen aber fülle man mit Nullen aus:

„ als ,

358|42187|548321.

§. 11.

Die vorzüglichsten Hauptveränderungen, welche mit den Zahlen vorgenommen werden können, es mögen dieselben ganze Zahlen oder Brüche seyn, bestehen darinn, daß sie sich vermehren oder vermindern lassen.

§. 12.

Die Vermehrung einer Zahl kann geschehen

1) durch die Addition, wenn zu einer Zahl eine andere gegebene hinzugethan oder gesetzt wird; oder

2) durch die Multiplication, wenn eine Zahl so vielmal genommen werden soll, als eine andere gegebene Zahl Einheiten enthält.

§. 13.

Die Verminderung einer Zahl kann geschehen

1) durch die Subtraction, wenn von einer Zahl eine kleinere weggenommen wird; oder

2) durch die Division, wenn von einer Zahl eine andere so vielmal als möglich abge-

zogen, und dadurch gefunden wird, wie vielmal sie in der erstern enthalten sey.

Anmerkung.

Zu Abkürzung der arithmetischen Arbeiten hat man folgende Zeichen eingeführt, als
Das Zeichen der Addition, welches plus oder mehr
— — der Subtraction — welches minus oder weniger ausgesprochen wird,
— — der Multiplication ein Punct . oder auch ein liegendes Andreaskreuz, als ×.
— — der Division; zwey übereinander stehende Punkte, als :
— — der Gleichheit = æqual.
um anzuzeigen, daß eine Zahl größer, als eine andere sey, so bedient man sich eines lateinischliegenden V, dessen Oeffnung gegen die linke Hand als > die größere Zahl major, hingegen dessen Spitze gegen die rechte Hand < die kleinere Zahl minor andeutet.

Zweyter Abschnitt.

Von der Vermehrung in ungenannten Zahlen durch die Addition.

§. 14.

Addiren heißt nichts anders, als zu einer gegebenen Zahl andere Zahl hinzuthun. Diejenigen Zahlen, welche addirt werden sollen, nennt man die Posten, die gesuchte Zahl

aber, welche den Posten zusammengenommen gleich ist, die Summe.

§. 15.

Bey der Addition sind folgende Regeln zu beobachten, als:

1) Setze man die gegebenen Posten so untereinander, daß die Ziffern von einerley Ordnung, nämlich die Einheiten unter die Einheiten, die Zehner unter Zehner, Hundert unter Hunderte u. s. w. gerade untereinander zu stehen kommen; und ziehe unter solche einen Querstrich.

2) Zähle man die Ziffern, so untereinander stehen, und zwar zuerst die Einer oder Einheiten, hernach die Zehner, alsdenn die Hunderte u. s. w. zusammen; und die Summe setze man unter den Strich.

3) Addire man die Zehner, welche aus den zusammengezählten Einheiten entstehen, sogleich zu den gegebenen Zehnern, eben so die Hunderte, welche aus den zusammengezählten Zehnern entstehen, sogleich zu den gegebenen Hunderten, u. s. w. Die auf diese Art gefundene einzelne Summen zusammen genommen, geben die gesuchte Summe aller gegebenen Posten.

Zum Exempel.

Es seyen folgende drey Zahlen, als 897 789 und 977 gegeben: man soll die Summe dieser drey Zahlen finden.

Sub Nr. 1. Nach der Regel setze man die gegebenen Zahlen untereinander, wie folgt; als

897
789
977
23
24
24
2663 Summe.

alsdenn zähle man nach Nr. 2, die Ziffern, so untereinander stehen, zusammen; so ist die Summe der ersten Reihe oder Einer gegen der rechten Hand — — 23
der zweyten oder der Zehner — — 24
der dritten oder Hunderte — — 24
addirt man nun diese drey Summen zusammen, so kommt für die gegebenen drey Zahlen die Summe 2663 heraus.

§. 16.

Diese Rechnung, welche bey großen Exempeln erstaunend weitläuftig werden, und auch vieles Papier kosten würde, hat man in der Praxin Unbequemlichkeit halber zu verkürzen gesucht; und wird obiges Exempel nach folgender Regel gerechnet, als:

1) Wenn in der Reihe der Einer oder Einheiten die Summe die Ziffer von 9 übersteigt, und folglich aus zweyen Ziffern besteht: so setze man blos die hintere Ziffer unter die erste Reihe, und behalte

2) die vordere im Sinn, oder in mente, und addire dieselbe zu den Zehnern. Besteht

3) die Summe der Reihe von Zehner ebenfalls aus mehr als einer Ziffer, so wird die erstere zu der Reihe der Hunderte addirt, und die hintere wird unter die Reihe der Zehner gesetzt;

$$\begin{array}{r} 897 \\ 789 \\ 977 \\ \hline 2663 \end{array}$$

Diese Summe wird auf folgende Art gefunden: als 7 und 9 ist 16 und 7 ist 23, von dieser Ziffer wird die 3 als ein Einer oder Einheit unter den Strich in die Stelle der Einer gesetzt, die Ziffer 2 aber wird im Sinne oder in mente behalten, und zu der Ordnung der Zehner addirt, indem man sagt, 2 und 7 ist 9 und 8 ist 17 und 9 ist 26, davon wird 6 neben die Ziffer 3 geschrieben, und 2 zu der Ordnung der Hunderte addirt. Man hätte im eigentlichsten Verstand aussprechen sollen 20 und 70 ist 90 und 80 ist 170, und 90 ist 260. Weil aber 6 in die Stelle der Zehner geschrieben worden, wo sie 60 andeutet, so wäre es überflüßig, die Zehner als Zehner zu benennen. Eben so wird die in mente oder im Sinne behaltene Ziffer 2 zu der Reihe der Hunderte addirt: und man sagt, 2 und 9 ist 11 und 7 ist 18, und 8 ist 26, diese Ziffer setzt man neben die zwey vorher-

vorhergehenden, so wird also die Summe seyn 2663, und ausgesprochen, zweytausend sechs hundert drey und sechszig.

Exempel zur Uebung.

4736	18534	70085
8975	2619	3608
3897	1487	5307
9539	367	80
27147	23007	235
		79315

Dritter Abschnitt.

Von der Vermehrung in ungenannten Zahlen durch die Multiplication.

§. 17.

Multipliciren heißt nichts anders, als eine gegebene Zahl etlichemal zu sich selbst addiren, oder eine gegebene Zahl so oft zusammenzählen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten enthält.

§. 18.

Diejenige Zahl, mit welcher die Vermehrung vorgenommen wird, oder welche multiplicirt werden soll, wird Multiplicandus, die Zahl aber, welche anzeigt, wie oft eine gegebene Zahl multiplicirt werden soll, der Mul-

tipli-

tiplicator; diejenige Zahl hingegen, welches heraus kommet, wenn die Multiplication verrichtet worden ist, das Produkt genannt.

Anmerkung.

Die beyden Zahlen, mit welchen die Multiplication vorgenommen wird, haben außer ihren besondern Namen auch noch einen gemeinschaftlichen Namen; und werden Factores genannt.

§. 19.

Alle Produkte zu finden, die heraus kommen, wenn man zwo Zahlen, deren jede mit einer Ziffer geschrieben wird, durcheinander multiplicirt, oder das sogenannte Einmal-Eins zu verfertigen.

Auflösung. Man zeichne sich

1) ein Viereck, das heißt, eine Figur, deren vier Seiten gleich lang sind.

2) Eine jede von diesen Seiten theile man in 9 gleich große Theile, und ziehe durch diese Theilungspuncte gerade Linien.

3) In die oberste 9 Fächer, wie auch in die 9 erste Fächer zur linken Hand schreibe man die Ziffern von 1 bis 9 in ihrer natürlichen Ordnung.

4) Addire man jede solcher Ziffern zu sich selbst, so hat man ihr Doppeltes, und zu ihrem Doppelten, so hat man ihr Dreyfaches,

und

und zu ihrem Dreyfachen, so hat man ihr Vierfaches u. s. w., welches man bis auf das Neunfache fortsetzen kann, so ist das Einmal Eins fertig.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 20.

Eine zusammengesetzte Ziffer mit einer einfachen zu multipliciren.

Auflösung.

1) Man setze den Multiplicator unter die Einheiten des Multiplicandus; darauf ziehe man einen Querstrich darunter.

2) Multiplicire man die Einheiten des Multiplicandus durch den Multiplicator. Kommt aber in einem Produkt eine Ziffer einer höhern Ordnung vor, das heißt, übersteigt das Produkt die Ziffer 9, und müßte folglich dasselbe mit zweyen Ziffern geschrieben werden, so schreibe man

3) nur die hintere Ziffer gegen der rechten Hand in die Reihe der Einheiten, die erstere Ziffer hingegen, gegen die linke Hand zu, behalte man im Sinn oder in mente, und wenn man

4) die Zehner des Multiplicandus durch den Multiplicator multiplicirt hat, so addire man die im Sinn behaltene Ziffer des vorigen Produkts dazu. Eben so verfährt man auch, wenn das neue Produkt der Zehner die Ziffer 9 übersteigt, bey der folgenden Ordnung der Hunderte, Tausende u. s. w.

Zum Exempel.

Es sey der gegebene Multiplicandus 352, und der Multiplicator 3

$$\begin{array}{r} 352 \\ 3 \\ \hline 1056 \end{array}$$

das unter dem Strich gesetzte Produkt ist hier also gefunden worden: 3 mal 2 ist 6, alsdenn 3 mal 5 ist 15, von diesem Produkt wird die 5 in die Stelle der Zehner gesetzt, die 1 aber im Gedächtniß oder im Sinne behalten. Hierauf sagt man 3 mal 3 ist 9, wozu die im Sinne behaltene 1 addirt wird, ist 10, welche Zahl, weil keine höhere Ziffer im Multiplicandus mehr übrig ist, ganz hingeschrieben wird.

Exem-

Exempel zur Uebung.

84325	56214	378954
7	8	9
590275	449712	3410586.

§. 21.

Zwey Zahlen ineinander zu multipliciren, wenn beyde durch zusammengesetzte Ziffern ausgedrückt sind.

Auflösung. Man suche

1) Das Produkt aus der Ziffer der niedrigsten Ordnung des Multiplicators in den ganzen Multiplicandus, und schreibe solches nach dem vorigen §. unter den Querstrich.

2) Schreibe man das Produkt aus der Ziffer der nächst höhern Ordnung des Multiplicators in den ganzen Multiplicandus unter das erste Produkt so, daß die niedrigste Ziffer dieses Produkts gerade unter die andere Ziffer des Multiplicators, daraus es entstanden ist, komme; und eben so verfahre man mit den Produkten aus den Ziffern der folgenden höhern Ordnung. Endlich

3) addire man alle die gefundenen Produkte, so giebt die Summe das gesuchte ganze Produkt.

Zum Exempel.

```
     5821
      235
  -------
    29105
   17463
  11642
  -------
  1367935
```

Das unter den untern Strich gesetzte Produkt ist also gefunden worden. Das Produkt aus 5 in den Multiplicandus 5821 ist 29105, welches zuerst unter den obern Strich geschrieben worden. Das Produkt aus 3 in den Multiplicandus ist 17463, welches ebenfalls unter den Strich geschrieben worden, aber so, daß die 3 als die niedrigste Ziffer unter den Zehner des Multiplicators 3 gekommen, weil man eigentlich, statt 3mal 1 ist 3, hätte sagen sollen, 30 mal 1 ist 30, daher die Stelle der Einer leer bleiben muß. Eben so ist das Produkt aus der 2 in den Multiplicandus nämlich 11642 so geschrieben worden, daß die 2 unter die 6 in die Stelle der Hunderte gekommen, weil man eigentlich hätte sagen sollen 200 mal 1 ist 200 u. s. w. Die Summe aus diesen dreyen einzelnen Produkten aber, nämlich 1367935 ist das gesuchte ganze Produkt.

Exempel zur Uebung.

75384	12345
987	6789
527688	111105
603072	98760
678456	86415
74404008	74070
	83810205

§. 22.

Wenn einer von den beyden Factoren, oder auch beyde hinter sich Nullen haben, so wird die Multiplication folgendermaßen verrichtet.

Auflösung.

Hat nun einer von den Factoren eine oder mehrere Nullen hinter sich, so multiplicire man

1) die ganze Zahlen in einander nach den §. 19 und 20. und zu dem Produkte setze man so viel Nullen, als der eine von den Factoren Nullen hat.

2) Haben aber beyde Factoren hinter sich eine oder mehrere Nullen, so addire man,

3) wenn man vorhero das Produkt von den ganzen Zahlen gefunden, so viel Nullen zu dem gefundenen Produkt, als die beyde Factoren Nullen haben, so ist dieser Aufgabe ein Genüge geschehen.

Zum Exempel.

57300	5367
22	35000
1146	26835
1146	16101
1260600	187845000

§. 23.

Es kann auch öfters der Fall eintreten, daß entweder eine oder auch mehrere Nullen zwischen dem Multiplicator stehen; und die Multiplication wird alsdenn mit den Zahlen vorgenommen, wie gewöhnlich. Trift es sich, daß eine Nulle an der Stelle der Zehner steht, so multiplicire man, wenn man mit den Einern den Multiplicandus multiplicirt hat, mit den Hunderten, und rücke von den Einern um zwey Nullen hinein. Befinden sich aber nicht nur in der Stelle der Zehner, sondern auch noch in den Hunderten Nullen, so multiplicire man zuerst mit den Einern, alsdenn mit den Tausenden, und setze das neue Produkt der Tausenden um drey Stellen weiter von den Einern des ersten Produkts zurück u. s. w.

Exempel.

703	2346001 .
301 .	5002 .
703	4692002
2109 .	11730005 . .
211603	11734697002 .

 Vier-

Vierter Abschnitt.

Von der Verminderung in ungenannten Zahlen durch die Subtraction.

§. 24.

Subtrahiren heißt, von einer Zahl eine andere gegebene Zahl einmal wegnehmen. Von den beyden gegebenen Zahlen heißt diejenige, von der die Subtraction geschehen soll, oder von welcher man abziehen soll, die größere Zahl, hingegen die andere, mit welcher die Subtraction verrichtet wird, oder welche von der größern abgezogen werden soll, die kleinere Zahl, und endlich diejenige Zahl, welche übrig bleibt, nennt man den Rest, die Differenz, oder auch den Unterschied.

§. 25.

Es sind zwey ungleiche Zahlen gegeben, man soll die kleinere von der größern abziehen.

Auflösung. Man schreibe

1) die kleinere Zahl unter die größere, so, daß die Einer der einen unter die Einer der andern, Zehner unter Zehner, Hunderte

unter

unter Hunderte u. s. w. wie bey der Addition gelehrt worden, zu stehen kommen. Ist

2) in der kleinern Zahl jede einfache Ziffer kleiner, als die ober ihr stehende: so zähle man in Gedanken die kleinere von der größern zurück, und setze, was übrig bleibt, unter den unter die beyden Zahlen gemachten Querstrich: als

	789
	323
Rest	466

dieses wird ausgesprochen: nachdem man bey der rechten Hand anfangt, 3 von 9 bleibt 6: diese 6 schreibe man unter die Einer unter den Querstrich; alsdenn ziehe man die Zehner ab, und sage 2 von 8 bleibt 6, und schreibe diese 6 in die Reihe der Zehner. Endlich sage man 3 von 7 bleibt 4 und hat man diese 4 in die Reihe der Hunderte geschrieben, so hat man 466 als den gesuchten Rest.

Exempel zur Uebung.

	56078		1789
	1003		1487
Rest	55075	Rest	302

§. 26.

Auf den Fall, der nur gar zu oft sich ereignet, daß einige unter den Ziffern der kleinern Zahl größer, als die darüber stehende

der größern Zahl sind, so geschiehet die Subtraktion nach folgender Regel:

Es ist in den ersten Abschnitt §. 7. deutlich erklärt worden; daß, wenn eine Reihe Ziffern neben einander stehen, diejenigen Ziffer von der rechten gegen die linke Hand immer zehnmal mehr bedeute, als in der nächst vorhergehenden Stelle; hieraus entsteht folgende Regel;

Wenn die obere Zahl kleiner als die untere ist, so nehme man von der nächstfolgenden zehen hinweg, und addire hiezu diejenige Zahl, von der die Subtraction geschehen soll.

Zum Exempel.

Man soll 38 von 64 abziehen.

Nachdem man die Zahlen gehörigermaßen geschrieben

$$\begin{array}{r} \dot{6}4 \\ 38 \\ \hline 26 \text{ Rest} \end{array}$$

so sage man 8 von 4 kann nicht abgezogen werden, um aber doch die Subtraction nach Verlangen bewerkstelligen zu können, so nehme man von der nächstfolgenden 6, eins hinweg; und oberhalb der Ziffer 6 mache man einen Punkt als 6˙, und weil diese 1 in Ansehung der Einer zehnmal mehr bedeutet, so

addire

addire man hiezu 4 und sage alsdann 8 von 14 bleiben 6, diese 6 schreibe man unter die Einer, und spreche man weiter 3 von 5, denn weil man von 6 Eins entlehnt oder geborgt hat, so ist diese Ziffer um eins weniger, bleiben 2, diese 2 schreibe man neben die vorhergefundene Ziffer 6, so ist 26 der ganze gesuchte Rest.

Exempel zur Uebung.

• • • •	• • • • • •
73421	8956781
26738	7968995
Rest 46638	Rest - 987786

§. 27.

Es kann auch bey dem sogenannten Borgen geschehen, daß die Ziffer, wovon man 1 borgen soll, eine Null ist, und läßt sich davon nichts abnehmen. Folgt auf die Null eine Ziffer, so verfahre man nach dem vorhergehenden §. hievon entlehnt man 1, so hat man 10 statt der 0. Von dieser Classe kann man zur folgenden Classe wieder 1 borgen, so bleiben 9, wie folgende Exempel es deutlich zeigen:

• • • • •	• • • • • •
10 10	10 10
730504	5082104
364738	1895676
365766	3186428

Hieraus ergiebt sich folgende Regel:

Wenn man über eine 0 weg borget, so ist es eben so viel, als wenn man die 0 in 9 verwandelt hätte.

§. 28.

Wenn mehrere Nullen nach einander folgen, so muß man von derjenigen Ziffer, die nach der letzten Null folgt, 1 borgen, so bekommt man 10 statt dieser 0; von diesen 10 borgt man wieder 1 weg in die nächst niedrige Classe, so wird diese 0 wieder 10, und in jener bleiben 9 u. s. w. Hieraus folgt denn die Regel:

Wenn man über mehrere nacheinander folgende Nullen wegborget, so ist es eben so viel, als ob man jede dieser Nullen in 9 verwandelt hätte.

Zum Exempel.

30076004	800005002
18598375	687359768
11477629	112645234

Anmerkung.

Um sich zu überzeugen, daß man die Rechnung richtig gerechnet habe, so addire man den Rest zu der kleinern gegebenen Zahl; so

muß

muß die Summa der größern gegebenen Zahl gleich seyn.

Fünfter Abschnitt.

Von der Verminderung in ungenannten Zahlen durch die Division.

§. 29.

Dividiren heißt von einer gegebenen Zahl eine andere gegebene so vielmal wegnehmen, oder abziehen, als angeht. Diejenige Zahl aber, von welcher eine andere auf diese Weise abgezogen werden soll, wird der Dividendus, diejenige Zahl aber, welche abgezogen werden soll, der Divisor, und die gesuchte Zahl, welche angiebt, wie oftmals die Subtraction vorgenommen worden ist, oder wie vielmal der Divisor in dem Dividendus enthalten ist, wird der Quotus oder Quotient genannt.

§. 30.

Eine Zahl durch eine andere zu dividiren.

Auflösung.

Bestehet der Divisor nur aus einer Ziffer, so suche man

1) wie vielmal der Divisor in der ersten, oder wenn diese kleiner ist, in den beyden ersten

sten Ziffern des Dividendus von der linken zur rechten Hand enthalten ist; das heißt; man suche oder schlage im Einmal=Eins eine Zahl auf, welche mit dem Divisor multiplicirt, ein Produkt giebt, welches so groß, oder nächst kleiner ist, als die erste, oder die beyden ersten Ziffern des Dividendus.

2) Diese Zahl schreibe man als den ersten Theil des Quotienten hinter einen Strich neben den Dividendus, das Produkt hingegen unter die erste, oder die ersten beyden Ziffern des Dividendus.

3) Ziehe man das Produkt von dem Dividendus ab. Hierauf schreibe man

4) die Ziffer der nächst niedrigern Ordnung im Dividendus neben den Rest, wenn einer vorhanden ist, oder, (wie man zu sprechen pflegt,) man hole die Ziffern der nächstniedern Ordnung herunter. Alsdenn suche man

5) wie vielmal der Divisor in dieser Zahl enthalten sey; schreibe man

6) den neuen Quotienten neben den vorigen Quotienten, und das Produkt setze man

7) unter die neue Zahl, und ziehe solches davon ab, u. s. w.

Alle einzelne Theile des Quotienten hinter dem Strich zusammen genommen, geben den gesuchten Quotienten.

Zum Exempel.

```
2 | 784 | 392
    6
  ----
    18
    18
   ----
     04
      4
    ----
      0
```

Der Quotient 392 zeigt an, daß die 2 in 784 dreyhundert zwey und neunzigmal enthalten sey, und solches auf folgende Art gefunden worden ist. Denn nach dem Ein-mal-Eins ist 2 mal 3 sechs, welches nächst kleiner ist als 7. Diese 3 ist der erste Theil des Quotienten hinter dem Strich, das Produkt 6 aus der 2 in dem Divisor aber unter 7 geschrieben, und von derselben subtrahirt werden. Neben den Rest 1 setze man die folgenden Ziffer des Dividendus nemlich 8, welche mit dem Rest 1 zusammen 18 ausmacht. In dieser 18 ist der Divisor 9 mal enthalten, denn 2 mal 9 ist 18, folglich ist 9 hinter den Strich neben die 3, das Produkt 18 aber unter die 18 zu setzen. Weil nun kein Rest bleibet, so hole man die 4 herunter, in welcher der Divisor 2 mal enthalten ist, folglich schreibe man 2 hinter den Strich, und das Produkt aus 2 in den Divisor nämlich 4 unter die Zahl 4 und subtrahire selbi-

ge.

ge. Da nun nichts übrig bleibt, so ist folglich der ganze Quotient 392.

Exempel zur Uebung.

```
3 | 141 | 47     3 | 1521 | 507
     12                15
   -----             ------
     21               021
     21                21
   -----             ------
      0                 0
```

§. 31.

Eine Zahl durch eine andere zu dividiren, wenn der Divisor aus zweyen oder mehrern Zahlen besteht.

Auflösung.

1) Suche man wie vielmal die erste Ziffer des Divisors zur linken in der ersten oder den beyden ersten Ziffern des Dividendus enthalten sey.

2) Nehme man an, weil diese erste Ziffer des Divisors die größte in derselben ist, daß der ganze Divisor eben so vielmal in den ersten Ziffern des Dividendus enthalten sey, man schreibe dahero solche gefundene Zahl hinter den Strich.

3) Multiplicire man diesen gefundenen ersten Theil des Quotienten mit dem ganzen Divisor,

4) das Produkt subtrahire man von den ersten Ziffern des Dividendus.

5) Neben den Rest schreibe man die nächst folgende Zahl des Dividendus, und verfahre eben so wie bey Nro. 1. 2. 3. und 4. gelehrt worden.

Zum Exempel.

```
24 | 834432 | 34768
     72
     ---
     114
      96
     ---
      184
      168
      ---
       163
       144
       ---
        192
        192
        ---
        000
```

Der Quotient 34768 wird auf folgende Art gefunden, nämlich 2 als die erste Ziffer des Divisors ist in 8 dreymal enthalten, folglich ist 3 hinter den Strich, und das Produkt aus 3 in 24 nämlich 72 unter die beyden ersten Ziffern des Dividendus nämlich 83 geschrieben und subtrahirt worden. Neben dem Rest ist die folgende Ziffer des Dividendus, nämlich 4 gesetzt worden. Weil

nun

nun 2 in 11 viermal enthalten, so ist 4 der zweyte Theil des Quotienten; das Produkt aus 4 in 24 nämlich 96 ist alsdenn subtrahirt worden u. s. w.

Exempel zur Uebung.

```
37 | 694120 | 18760
     37
     ---
     324
     296
     ---
      281
      259
      ---
       222
       222
       ---
       ..00
```

```
287 | 354158 | 1234
      287
      ---
      671
      574
      ---
       975
       861
       ----
       1148
       1148
       ----
       0000
```

```
584 | 294608173 | 504466
      2920
      ----
       260.8
       233 6
       -----
        27 21
        23 36
        -----
         3 857
         3 504
         -----
          35 33
          35 04
          -----
          00(29)
```

Anmerkung.

Wenn der Divisor in den Dividendus nicht gänzlich aufgehet, so schließe man den Rest in Klammern ein; wie bey vorstehendem Exempel ersichtlich ist.

§. 32.

Haben sowohl der Dividendus als auch der Divisor am Ende Nullen, so geschiehet die Division mit den ganzen Ziffern, wie in den beyden vorhergehenden Paragraphen gezeigt worden ist, und die Nullen sowohl im Dividendus als im Divisor, wenn dieselben gleich viel Nullen haben, werden am Ende weggestrichen. Sind aber nur im Divisor

eine oder mehrere Nullen befindlich, so streicht man im Dividendus so viel Zahlen weg, als der Divisor Nullen enthält; auch in beyden Fällen setzt man die weggestrichene Nullen oder ausgelassene Ziffern des Dividendus mit zu dem Rest.

Zum Exempel.

```
4ø | 736ø | 184
      4
     ---
     33
     32
    ----
      16
```

```
5øø | 85øø | 17
      5
     ---
     35
```

```
3øø | 48 | 26 | 16
      3
     ---
     18
     18
    -----
     ..(25)
```

```
6øø | 738 | 71 | 123
      6
     ---
     13
     12
    -----
      18
      18
     -----
     ..(71)
```

§. 33.

Wenn man den herausgekommenen Quotienten nach verrichteter Division mit dem Divisor multiplicirt; und zu dem herausgekommenen Produkt den Rest, wenn einer vorhanden ist, addirt, so giebt das Produkt den Dividendus.

Sechs-

Sechster Abschnitt.

Von den Brüchen, und von den Rechnungsarten mit den Brüchen.

§. 34.

Wird ein gewisses Ganze in etliche gleich große Theile abgetheilt, so nennt man einen oder mehrere dieser Theile des Ganzen einen Bruch.

§. 35.

Diejenige Zahl eines Bruches, welche anzeigt, in wie viel gleichgroße Theile ein Ganzes abgtheilt worden ist, heißt der Nenner: diejenige Zahl hingegen, welche bestimmt, wie viel gleich große Theile man von einem Ganzen genommen habe, der Zähler. Um einen Bruch auszudrücken, wird der Zähler oberhalb und der Nenner unter diesen, aber durch einen Querstrich abgesondert, geschrieben.

Zum Exempel.

$\frac{2}{3}$ wird ausgesprochen $\frac{\text{Zwey}}{\text{Drittel}}$

2 ist der Zähler, und 3 der Nenner.

§. 36.

Ein sogenannter eigentlicher oder ächter Bruch ist derjenige, welcher nur aus

einem oder aus etlichen gleichgroßen Theilen eines Ganzen besteht, und niemals ein Ganzes, sondern immer weniger gilt. Ein uneigentlicher oder unächter Bruch aber ist ein solcher, welcher entweder mehr, oder auch so viel als ein Ganzes gilt; oder dessen Zähler entweder größer als der Nenner, oder eben so groß als der Nenner ist.

§. 37.

Ueberdies theilt man die Brüche auch noch ein, 1) in reine und 2) in gemischte Brüche. Reine Brüche sind diejenige, welche keine ganze Zahlen vor sich haben; gemischte Brüche hingegen solche, denen ganze Zahlen angehängt sind, oder die ganze Zahlen vor sich haben.

§. 38.

Außer diesen angeführten Fällen bestehen bey den Brüchen die Zähler und Nenner aus ganzen Zahlen, oder auch aus gebrochenen Zahlen. Im ersten Fall heißen die Brüche einfache Brüche, im andern hingegen doppelte oder gebrochene Brüche.

§. 39.

Diejenige Brüche, deren Nenner eine Zehne, oder ein Produkt aus Zehen ist, nennt man Decimalbrüche.

§. 40.

§. 40.

Einen gegebenen Bruch in einen andern verwandeln, daß er den nämlichen Werth behalte, geschieht aus viererley Arten, nämlich:

1) wenn man zwey oder mehrere Brüche unter einerley Benennung bringt; oder dieselbe so verwandelt, daß sie alle ohne Veränderung ihres Werthes einen gleichen Nenner bekommen.

2) Durch das Abbreviren, oder durch das Aufheben der Brüche, wenn man einen Bruch ohne Veränderung seines Werths durch einen kleinern Zähler und Nenner ausdrückt.

3) Durch die Resolution der Brüche, wenn man einen Bruch ohne Veränderung seines Werths in einen andern verwandelt, dessen Nenner gegeben ist. Und endlich

4) durch das Einrichten gemischter Brüche, wenn man dieselbe in unächte reine Brüche verwandelt.

§. 41.

Es sind zwey oder auch mehrere Brüche gegeben, welche verschiedene Nenner haben, man soll diese Brüche so verändern, daß alle gleiche Nenner bekommen, ohne daß die Größe der Brüche selbst geändert wird, oder, (wie man gewöhnlich zu sagen pflegt,) man soll die Brüche unter einerley Benennung bringen.

Auflösung.

Sind nur zwey Brüche gegeben, so multiplicire man einen jeden Bruch durch des andern Nenner: z. E. es sollen die Brüche $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{4}$ unter einerley Benennung gebracht werden; so multiplicire man den Zähler des ersten Bruchs mit dem Nenner des andern Bruches; alsdenn den Zähler des andern Bruches mit dem Nenner des ersten Bruches, und endlich multiplicire man die beyden Nenner mit einander, und setze dieses Produkt an, so bekommt man die Brüche $\frac{18}{24}$ und $\frac{20}{24}$, welche gleiche Nenner haben, und eben so viel gelten, als $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{4}$.

Sind mehrere Brüche gegeben; so multiplicire man

1) eines jeden Zähler und Nenner mit dem Produkt aus allen Nennern der übrigen Brüche. Z. E. Es sollen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{5}$ unter gleiche Benennung gebracht werden; so multiplicire man des ersten Bruchs Zähler und Nenner durch 10 des dritten Bruchs Zähler und Nenner durch 6, hierdurch erhält man $\frac{15}{30}$ $\frac{20}{30}$ $\frac{12}{30}$, welche Brüche gleiche Nenner haben, und eben so groß sind als die gegebenen Brüche. Oder

2) man multiplicire alle Nenner der gegebenen Brüche in einander: so giebt das Produkt den gemeinschaftlichen Nenner. In diesen gemeinschaftlichen Nenner dividire man mit allen Nennern der gegebenen Brüche, die herausgekommene Quotienten aber

multi-

multiplicire man mit allen Zählern der gegebenen Brüche. Die sich ergebende Produkte sind die Zähler zu den Brüchen, welche alle den gefundenen gemeinschaftlichen Nenner haben, und den gegebenen Brüchen gleich sind.

Zum Exempel.

Es sollen die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{7}$ unter gleiche Benennung gebracht werden, so geschieht dieses auf folgende Weise:

2.	der Nenner des ersten Bruchs
3.	— — des andern — —
6.	Produkt des ersten in den andern
5.	der Nenner des dritten Bruchs.
30.	Produkt des Nenners des dritten Bruchs in das Produkt der zwey ersten Brüche.
7.	Nenner des vierten Bruchs
210.	Produkt aller vier Nenner oder der gemeinschaftliche Nenner.

$\frac{1}{2}$	105	—	—	—	105
$\frac{2}{3}$	70	—	—	—	140
$\frac{3}{5}$	42	—	—	—	126
$\frac{2}{7}$	30	—	—	—	60

folglich sind $\frac{105}{210}$ $\frac{140}{210}$ $\frac{126}{210}$ und $\frac{60}{210}$ diejenige Brüche, welche statt der gegebenen Brüche gelten können, und welche alle gleiche Nenner haben, nämlich 210.

§. 42.

Es läßt sich aber diese Rechnung zuweilen abkürzen, wenn nämlich unter den gegebenen Brüchen die Nenner so beschaffen sind, daß der größte Nenner durch alle andere kleine Nenner ohne Rest kann dividirt werden. In diesem Fall nimmt man den größten Nenner für den gemeinschaftlichen Nenner an; dividirt man nun mit dem Nenner der übrigen gegebenen Brüche darein, so sind sämmtliche Brüche unter einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht.

Zum Exempel.

Es seyen die Brüche $\frac{3}{7}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{13}{28}$ gegeben. Bey genauer Uebersicht dieser Brüche findet man sogleich, daß der Nenner im dritten Bruche 28 auch durch die übrigen Nenner getheilt werden kann. Mithin wird die Rechnung, wenn man 28 für den gemeinschaftlichen Nenner annimmt, wie im vorhergehenden §. angezeigt worden, verrichtet, und auf folgende Weise gerechnet.

(28.)

$\frac{3}{7}$ 4 — — — 12
$\frac{9}{14}$ 2 — — — 18
$\frac{13}{28}$ 1 — — — 13

folglich sind die Brüche $\frac{12}{28}$, $\frac{18}{28}$ und $\frac{13}{28}$ den gegebenen Brüchen gleich; und haben alle Brüche 28 zum gemeinschaftlichen Nenner.

§. 43.

Einen gegebenen Bruch einfacher auszudrücken, oder, wie man gemeiniglich zu sagen pflegt, einen Bruch aufheben, oder abbreviren.

Auflösung.

Man suche eine Zahl, womit sich sowohl der Zähler als der Nenner des Bruches theilen läßt, ohne daß ein Rest bleibet. Z. E. Es soll der Bruch $\frac{36}{48}$ aufgehoben werden; so ist es augenfällig, daß sich sowohl der Zähler als auch der Nenner mit 12 theilen läßt. Dividirt man nun mit 12 in 36 als den Zähler, und in 48 als den Nenner, so entsteht ein Bruch $\frac{3}{4}$, welcher kürzer ausgedrückt ist, aber doch eben so groß als der gegebene Bruch $\frac{36}{48}$ ist.

Anmerkung.

Besteht der Zähler und Nenner, oder auch nur einer von beyden aus ungeraden Zahlen, so muß die Zahl, womit der Bruch aufgehoben werden soll, auch eine ungerade Zahl seyn: sind aber der Zähler und Nenner gerade Zahlen, so können dieselbe sowohl durch gerade als ungerade Zahlen aufgehoben werden.

§. 44.

Einen Bruch in einen andern Bruch verwandeln, daß er den nämlichen Werth

behalte, und zwar durch das Resolviren oder durch die Resolution.

Auflösung.

1) Man multiplicire den Zähler des gegebenen Bruches mit dem gegebenen Nenner; und

2) dividire man das Produkt durch den Nenner des Bruches, so giebt der Quotient den Zähler eines Bruches, welcher den gegebenen Nenner hat, und dem gegebenen Bruch gleich ist.

Zum Exempel.

Es soll der Bruch $\frac{3}{4}$ in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 16 ist, so multiplicire man den Zähler 3 mit dem gegebenen Nenner 16, giebt das Produkt 48, mit dem Nenner 4 dieses Produkt dividirt, giebt 12 zum Quotienten: folglich $\frac{12}{16}$ eben so viel als $\frac{3}{4}$.

§. 45.

Einen gemischten Bruch einrichten.

Auflösung.

1) Man multiplicire die ganze Zahl, welche demselben angehängt ist, mit dem Nenner des Bruchs; und

2) zu dem Produkt addire man den Zähler dieses Bruchs; so ist

3) die Summe der Zähler zu einem unächten reinen Bruche, welcher den Nenner des gegebenen Bruches zu seinem Nenner hat, und dem gegebenen gemischten Bruch gleich ist.

Zum Exempel.

Es soll der Bruch $3\frac{1}{2}$ eingerichtet werden; so multiplicire man 3 mit dem Nenner 2, hiezu den Zähler 1 addirt, so ist die Summe 7 zum Zähler eines Bruches, welcher 2 zum Nenner hat, folglich $\frac{7}{2}$ ist: und dieser Bruch gilt eben so viel als $3\frac{1}{2}$.

§. 46.

Es sind zwey oder mehrere Brüche gegeben, man soll dieselben zusammen addiren.

Auflösung.

Hierbey sind zwey Fälle zu betrachten: denn einmal haben die Brüche einerley Nenner, oder aber zweytens haben sie verschiedene Nenner.

Im ersten Falle werden die Zähler aller gegebenen Brüche zusammen addirt, und die Summe wird zum Zähler eines Bruches gemacht, der den Nenner der gegebenen Brüche hat.

Zum Exempel.

$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$

$\frac{7}{8} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{16}{8} = 2.$

$\frac{4}{7} + \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}.$

Im zweyten Fall, wenn die Brüche verschiedene Nenner haben, so bringe man solche nach §. 41.

1) unter einerley Benennung,

2) addire man die neuen Zähler derselben, und mache diese Summe zum Zähler eines Bruches, welche den gefundenen gemeinschaftlichen Nenner hat.

Zum Exempel.

$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ gegebene Brüche.

$\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$ reducirte Brüche.

$\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$ Summe der Brüche.

$^{3}/_{5} + {}^{1}/_{2} + {}^{3}/_{4} =$ gegebene Brüche.

$\frac{12}{20} + \frac{10}{20} + \frac{15}{20} =$ reducirte Brüche.

— $\frac{37}{20} = 1\frac{17}{20} =$ Summe der Brüche.

$\frac{1}{3} + \frac{5}{7} + \frac{3}{5} + \frac{1}{8}$ gegebene Brüche.

$\frac{280}{840} + \frac{600}{840} + \frac{504}{840} + \frac{105}{840}$ reducirte Brüche.

$\frac{1489}{840} = 1\frac{649}{840} =$ Summe der Brüche.

§. 47.

Einen gegebenen Bruch von einem andern gegebenen größern zu subtrahiren.

Auflösung.

Es giebt wieder vier Fälle. Erster Fall. Haben die Brüche gleiche Nenner, so ziehe man den kleinen Zähler von den größern ab, und der Rest ist alsdenn der Zähler eines Bruches, welcher den Nenner der gegebenen Brüche hat.

Zum Exempel.

$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Rest.
$\frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$ Rest.
$\frac{18}{37} - \frac{5}{37} = \frac{13}{37}$ Rest.

Zweyter Fall. Haben die gegebenen Brüche verschiedene Nenner, so bringe man solche nach §. 41. unter einerley Benennung; alsdenn ziehe man den neuen Zähler des größern Bruches von dem kleinern ab; und den Rest nehme man zum Zähler eines Bruchs, welcher den gefundenen gemeinschaftlichen Nenner hat.

Zum Exempel.

Gegebene Brüche.	$\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$	$\frac{1}{3} - \frac{3}{7}$
Reducirte Brüche.	$\frac{15}{20} - \frac{8}{20}$	$\frac{7}{21} - \frac{6}{21}$
Rest der Brüche.	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{21}$

Dritter Fall. Soll ein Bruch von einer ganzen Zahl subtrahirt werden, so verwandle man die ganze Zahl in einen Bruch, welche den Nenner des gegebenen Bruches hat.

Zum

Zum Exempel.

Es soll $\frac{2}{3}$ von 4 subtrahirt werden, so wird 4 in den Bruch $\frac{12}{3}$ verwandelt, alsdenn 2 von 12 abgezogen, so ist der gesuchte Rest $\frac{10}{3}$ oder $3\frac{1}{3}$.

Vierter Fall. Sollen gemischte Brüche von einander subtrahirt werden, so verwandle man 1) beyde in unächte Brüche, und subtrahire man solche alsdenn: oder 2) ziehe man den Bruch, welcher der ganzen Zahl, die subtrahirt werden soll, angehängt ist, von dem Bruche der größern Zahl, und hernach die kleinere ganze Zahl von der größern ab; auf den Fall aber, daß der Bruch der kleinern Zahl größer ist als derjenigen der größern, so borge man von der größern ganzen Zahl 1, verwandle solche in einen Bruch, welcher den Nenner des kleinern Bruchs hat; alsdenn addire man zu diesem den kleinern Bruch, und endlich subtrahire man die Brüche und ganze Zahlen.

Zum Exempel.

Es soll $3\frac{1}{3}$ von $7\frac{2}{3}$ abgezogen werden, so ist der gesuchte Rest $4\frac{1}{3}$. Es soll ferner $2\frac{1}{4}$ von $5\frac{1}{2}$ subtrahirt werden: so verwandle man beyde zuerst in die unächte Brüche $\frac{9}{4}$ und $\frac{11}{2}$, alsdenn bringe man die Brüche unter gleiche Nenner $\frac{9}{4}$ und $\frac{22}{4}$, nun subtrahire man die

Zähler

Zähler von einander, so ist der Rest $\frac{13}{4}$ oder $3\frac{1}{4}$. Noch weiters soll $4\frac{2}{3}$ von $6\frac{1}{2}$ subtrahirt werden, und zwar die Brüche und ganze Zahlen allein, so borge man, weil der Bruch $\frac{2}{3}$ größer ist als $\frac{1}{2}$, zuerst 1 von 6; verwandle dieses in den Bruch $\frac{2}{2}$, und addire $\frac{1}{2}$ dazu, so bekommt man $\frac{3}{2}$, worauf $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{2}$, sobald diese beyde Brüche unter einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht worden sind, nämlich $\frac{4}{6}$ und $\frac{9}{6}$ subtrahirt werden können, wo alsdenn die Differenz der beyden Brüche $\frac{5}{6}$ zu der Differenz der ganzen Zahlen 4 und 5, welche 1 ist, gesetzt wird: mithin ist die gesuchte Differenz $1\frac{5}{6}$.

§. 48.

Einen Bruch mit einem andern Bruche multipliciren heißt nichts anders, als den ersten Bruch in so viele Theile theilen, als des andern Bruches Nenner Einheiten hat, und von diesen Theilen so viel nehmen, als des andern Bruches Zähler hat. Ersteres geschieht durch die Multiplication der Nenner, das letztere hingegen durch die Multiplication der Zähler; folglich, wenn man einen andern Bruch multipliciren soll, so darf man nur den Zähler des einen Bruches mit dem Nenner des andern Bruches multipliciren, so giebt alsdenn das erste Produkt den Zähler, das andere hingegen den Nenner eines Bruches, welches dem gesuchten Produkt beyder Brüche gleich ist.

Zum

Zum Exempel.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$
$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$
$\frac{2}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}.$

§. 49.

Um sich dieser Auflösung vergewissert zu halten; so dividire man das Multiplicandum durch den Nenner des Multiplicators, und den herausgekommenen Quotienten multiplicire man mit dem Zähler des Multiplicators. Also

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times (\frac{2}{3} : 4) \times 3 = \frac{2}{3 \times 4} \times 2 = \frac{2 \times 3}{3 \times 4}$$

§. 50.

Auf eine andere Art die Brüche mit einander zu multipliciren; so dividire man kreuzweise des Multiplicandi Zähler durch des Multiplicators Nenner, und jenen Nenner durch diesen Zähler: so ist ersterer Quotient der Zähler, und letzterer der Nenner des gesuchten Quotienten.

Zum Exempel.

$$\frac{5}{8} \times \frac{2}{3} \times \frac{6 : 3}{8 : 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

§. 51.

Eben diese Aufgabe kann auch noch auf folgende Art aufgelößt werden: man multiplicire des Zähler des Multiplicandi in den Multiplicator, und lasse den Nenner ungeändert.

Zum Exempel.

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{\frac{12}{7}}{5};\quad \frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{\frac{21}{8}}{5}$$

§. 52.

Noch anders

Man dividire des Multiplicandi Nenner mit dem Multiplicator, und behalte den Zähler.

Zum Exempel.

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{\frac{4}{35}}{3};\quad \frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{\frac{3}{40}}{7};$$

§. 53.

Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, so multiplicire man nur den Zähler des gegebenen Bruches mit der gegebenen ganzen Zahl. Das Produkt giebt den Zähler eines Bruches, welcher den Nenner des gegebenen Bruches hat, und das gesuchte Produkt ist.

Zum Exempel.

Es soll $\frac{3}{4}$ mit 2 multiplicirt werden, so ist das Produkt $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$. Oder $\frac{1}{3}$ mit 4 $= \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, oder $\frac{7}{12}$ mit 8 $= \frac{56}{12} = 4\frac{2}{3}$.

§. 54.

Sollen gemischte Brüche miteinander multiplicirt werden, so verwandle man dieselbe zuerst in unächte Brüche, und multiplicire alsdenn solche nach §. 46.

Zum Exempel.

Es sollen $3\frac{1}{2}$ und $4\frac{2}{7}$ mit einander multiplicirt werden, so verwandle man dieselbe nach §. 44. in unächte Brüche, nämlich $\frac{7}{2}$ und $\frac{30}{7}$, so ist das Produkt $\frac{210}{14}$ oder 13, oder $6\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{5}$ multiplicirt, giebt zum Produkt $\frac{60}{15} = 4$.

§. 55.

Einen gegebenen Bruch mit einem andern gegebenen Bruch zu dividiren.

Erste Auflösung.

Man multiplicire kreuzweise des Dividendi Zähler in des Divisors Nenner, und des Dividendi Nenner in des Divisors Zähler; so ist ersteres Produkt der Zähler, und letzteres der Nenner des gesuchten Bruches.

Oder

Oder man kehre den Divisor um, das heißt; man mache den Zähler desselben zum Nenner, und den Nenner zum Zähler; alsdenn multiplicire man denselben mit dem andern Bruch; so ist das gefundene Produkt der gesuchte Quotient.

Zum Exempel.

Es soll $\frac{2}{3}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden;

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}.$$

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{9} = \frac{3}{4} + \frac{9}{2} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}.$$

Zweyte Auflösung.

Man dividire den Zähler und Nenner des Dividendi, jenen durch den Zähler, und diesen durch den Nenner des Divisors: so ist jener Quotient der Zähler, und dieser der Nenner des gesuchten Bruches.

Zum Exempel.

$$\frac{21}{24} : \frac{3}{8} = \frac{21}{24} \times \frac{8}{3} = \frac{168}{72} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Dritte Auflösung.

Man dividire den Zähler des Dividendi durch den Divisor, und lasse den Nenner ungeändert.

Zum Exempel.

$$\frac{5}{8} : \frac{4}{9} = \frac{5}{8} \times \frac{9}{4} — \frac{5 \times \frac{9}{4}}{8} = \frac{5 : \frac{4}{9}}{8}.$$

Vierte Auflösung.

Man multiplicire des Dividendi Nenner durch den Divisor, und lasse den Zähler ungeändert.

Zum Exempel.

$$\frac{5}{8} : \frac{4}{9} = \frac{5}{8} \times \frac{9}{4} = \frac{5}{8 : \frac{9}{4}} = \frac{5}{8 \times \frac{4}{9}}.$$

§. 56.

Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden; so multiplicire man nur den Nenner des Bruches mit der gegebenen Zahl, so giebt das Produkt den Nenner eines Bruches, welcher den Zähler des gegebenen Bruches hat, und der gesuchte Quotient ist.

Zum Exempel.

Es soll $\frac{3}{4}$ durch 2 dividirt werden; so ist der Quotient $\frac{3}{8}$.

$\frac{7}{8} : 2 = \frac{7}{16}$. $\frac{5}{6} : 5 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

§. 57.

Sollen gemischte Brüche dividirt werden, so verwandle man sie zu allererst nach §. 44. in unächte Brüche, und verfahre nach der im 54. §. gegebenen Anweisung.

Zum Exempel.

Es soll $3\frac{2}{5}$ durch $1\frac{3}{4}$ dividirt werden.

$3\frac{2}{5} : 1\frac{3}{4} = \frac{17}{5} : \frac{7}{4}$. oder

$\frac{17}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{68}{35} = 1\frac{33}{35}$. Quotient.

Oder: es soll $6\frac{2}{9}$: durch $\frac{5}{8}$ dividirt werden:

$6\frac{2}{9} : \frac{5}{8} = \frac{56}{9} \times \frac{8}{5} = \frac{448}{45} = 9\frac{43}{45}$ der gesuchte Quotient.

Anmerkung.

So viel von den Rechnungen mit unbenannten Zahlen. Ehe und bevor man die Rechnungen mit benannten Zahlen, wie auch die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen gründlich einsehen will, muß man sich nachfolgende Resolvirung der Münzen, Maaße, und Gewichte wohl bekannt machen; als:

Münze.

60. Kreuzer machen einen Gulden.
15. Batzen, ebenfalls.
20. Groschen, desgleichen.
4. Kreuzer ist ein Batzen.
3. Kreuzer ein Groschen.
4. Pfennige ein Kreuzer.
8. Heller, desgleichen.
2. Heller ein Pfennig.

Abbrevirt.

60. Kr. ist 1 fl.
15. Baz. = 1 fl.
20. Gr. = 1 fl.
4. Kr. = 1 Batz.
3. Kr. = 1 Gr.
4. Pf. = 1 Kr.
8. hl. = 1 Kr.
2. hl. = 1 Pf. oder dl.

Gewicht.

32. Loth ist ein Pfund. ℔.
8. Loth = ein Vierling. Vr.
4. Vierling = ein ℔.
100. ℔. = ein Centner. Ctr.
1. Loth hat 4 Quint. Qt.
1. ℔. Frohngewicht hält 1 ℔. 1 Loth, 1 Qt. Kramergewicht.
100. ℔. Frohngewicht halten 103 ℔. 29 Lt. Kramergewicht netto.
1. ℔. Kramergewicht hat 2 Mkr. — $\frac{5}{8}$ Pf. Silbergewicht.

Silbergewicht.

1. Mark, Mr. hat $\frac{1}{2}$ ℔. oder 16. Loth. oder 8 Unzen.
1. Unze hat 2 Loth.
1. Loth hat 4 Quint.
1. Quint hat 4 Pfennige.
1. Pfennig hat 2 Heller.

Gold

Goldgewicht.

1. Mr. hat 24 Karat.
1. Karat ist 4 Gran.
1. Gran 3 Grän.
3. Karat 2 Loth.
$67\frac{1}{4}$ gewichtige Ducaten: oder
70. Cronen Gewicht thun 1. Mr.

Apothecker-Gewicht.

1. Gran ist ein Gerstenkörnle schwer.
20. Gran ist 1. Scrupel.
3. Scrupel ist 1. Drachma oder Quint.
8. Drachma ist 1. Unze.
12. Unzen thun 1. ℔.

Augsburger Getreide-Maaß.

1. Schaff hat 8. Metzen.
1. Metzen hat 4. Vierling.
1. Vierling hat 4. Viertele.
1. Viertele hat 4. kleine Mäßle.

Augsburger Getränk-Maß.

1. Eicht- oder Visier-Eymer hat 64 Maß.
1. Schenk-Eymer hat 72 Maß.
4. Maß ist ein Napf.
2. Maß ein Viertel.

 1. Maß

1. Maß hat 2. Seidlen.
1. Maß hat 4. Quart oder Quärtle.
1. Seidle hat 2. Quärtle.
1. Quärtle 2. Achtele.

Feldmaaß.

1. Ruthe hat 10. Werkschuh.
1. Schuh hat 10. Zoll.
1. Zoll 10. Linien.
1. Linie 10. Scrupel.
1. Quadratruthe hat 10. Quadratschuh.
400. Quadratruthen, oder 40000. Quadratschuh hält 1. Tagwerk.
60000. Quadratschuh 1. Jauchert Feld oder Waldung.

Ellenmaaß.

1. Elle hat 16. Sechszehntheile.
4. Sechszehntheil ist ein Viertel.
8. Sechszehntheil ist ½ Elle.
4. Viertel ist 1. Elle.
2. Viertel ist ½ Elle.

Vom Papier.

10. Rieß ist ein Ballen.
20. Buch ist ein Rieß.
25. Bogen ist ein Buch Druckpapier.
24. Bogen ist ein Buch Schreibpapier.

Von

Von der Zeit.

365. Tage ist ein gemeines Jahr.
366. Tage ist ein Schaltjahr, so alle 4 Jahre einfällt.
12. Monate machen ein Jahr.
52. Wochen machen ein Jahr.
7. Tage machen 1. Woche.
24. Stunden einen Tag.
60. Minuten eine Stunde.
60. Sekunden eine Minute.

Siebenter Abschnitt.

Von den Rechnungsarten in genannten Zahlen.

I.

Durch die Addition.

§. 58.

Die im zweyten Abschnitte abgehandelten Regeln gelten bey diesen Rechnungen ebenfalls, und ist zu denselben weiter nichts hinzu zu setzen, als daß die Zahlen, welche einerley Namen haben, ordentlich unter einander geschrieben werden müssen.

Zum Exempel.

Es sollen folgende Posten, die man sogleich gehörig unter einander setzen muß, nämlich

lich Gulden unter Gulden, Kreuzer unter Kreuzer, Pfennige unter Pfennige, addirt werden; als:

fl.	kr.	Pf.
22.	38.	2.
58.	44.	3.
139.	55.	1.
246.	26.	3.
467 fl.	45 kr.	1 Pf.

Nachdem man die im vorigen Abschnitt vorgemerkte Resolvirung der Maße, Münzen und Gewichte sich bekannt gemacht haben muß, so hat man die unter dem Querstrich gesetzte Summe auf folgende Art gefunden. Man hat zuerst alle Pfennige eben so, wie die unbenannten Zahlen, in eine Summe gebracht. Diese Summe war 9. Da nun diese schon Kreuzer, oder einige solche größere Einheiten, deren jede aus 4. kleinern besteht, enthält, so dividirte man sie mit 4. Der Quotient 2 deutet an, wie viel Kreuzer, der Rest 1 aber, wie viel Pfennige über 2. Kreuzer in 9 Pfennigen enthalten seyen. Der Rest 1. wird folglich unter die Pfennige gesetzt, der Quotient 2. aber zu den Kreuzern addirt, deren Summe 165. betrug. Weil nun diese schon Gulden, oder wieder größere Einheiten, deren jede aus 60. kleinern besteht, enthält, so dividirte man mit 60. darein. Der Quotient 2. zeigte an, wie viel Gulden, der Rest 45. aber, wie viel Kreuzer

zer über 2 Gulden in 165 Kreuzer enthalten seyen. Man setze daher den Rest 45. unter die Kreuzer, der Quotient 2. aber wurde zu den Gulden, deren Summe 467 ausmachte, addirt. Folglich beträgt die ganze Summe

467 fl. 45 kr. 1 Pf.

Exempel zur Uebung.

Centr.	℔.	Loth.	Quint.
13.	89.	27.	3.
24.	91.	31.	1.
6.	77.	18.	2.
14.	53.	9.	1.
48.	10.	12.	3.
108 Ct.	23 ℔.	3 Lt.	2 Qt.

Visiereymer.	Maß.	Quärtle.
12.	57.	3.
49.	43.	1.
8.	32.	3.
5.	19.	3.
20.	58.	2.
97 Eym.	20 Ms.	— Qrtle.

Schaff.	Metzen.	Viertele.
11.	7.	7.
23.	5.	3.
8.	1.	10.
43 Schff.	6 Mtz.	4 Viertele.

Ein Haushalter hat folgende fünf Ausgaben gehabt. Erstlich 136 Gulden, 58 Kreuzer, 3 Pfennige. Zweytens 47 Gulden, 9 Kreuzer, 2 Pfennige. Drittens 204 Gulden, 48 Kreuzer, 3 Pfennige. Viertens 87 Gulden, 8 Kreuzer. Fünftens 107 Gulden und 3 Pfennige. Wie groß ist die ganze Ausgabe?

fl.	kr.	Pf.
136.	58.	3.
47.	9.	2.
204.	48.	3.
87.	8.	0.
107.	0.	3.
583. fl.	5. kr.	3. Pf.

Anmerkung.

Dergleichen Rechnungen kommen sehr oft vor bey Verfertigung der Inventarien, und bey den Rechnungen der Haushalter; da es dann sich öfter ereignet, daß man sehr viele dergleichen Posten, welche wohl mehrere Blätter anfüllen, zusammen addiren muß. In diesem Falle dann kann man jede Seite in mehrere Classen abtheilen; jede Classe besonders addiren; die Particularsummen eines jeden Blattes auf ein besonderes Papier schreiben: selbe zusammen addiren, damit man also die Summe des ganzen Blattes bekomme. Diese Summe aus allen Classen einer Seite wird zu unterst am

Blatte

Blatte unter einem Querstriche angeschrieben. Eben diese Summe wird auch zu oberst auf das folgende Blatt geschrieben. Die Posten dieses folgenden Blattes werden, wie zuvor, in eine Summe gebracht; diese Summe unter die vorige geschrieben; beyde zusammen addirt, und also bekömmt man die Summe zwoer Seiten. Diese Summe wird zu oberst auf der dritten Seite wieder angeschrieben; diese dritte Seite abermal zusammen gerechnet, u. s. f. bis man alle Posten in eine Summe gebracht hat.

Ein reicher Bauer hat am Getreide lassen ausdreschen 7 Schaff, 6 Metzen, 3 Vierlinge; und wieder 13 Schaff, 7 Metzen, 2 Vierlinge; drittens 18 Schaff, 5 Metzen, 3 Vierlinge; viertens 20 Schaff, 7 Metzen, 3 Vierlinge; und endlich fünftens 19 Schaff, 3 Metzen, 2 Vierlinge. Was beträgt die ganze Summe?

Sch.	Mtz.	Vr.
7.	6.	3.
13.	7.	2.
18.	5.	3.
20.	7.	3.
19.	3.	2.
80. Sch.	7. Mtz.	1. Vr.

Ein Handelsmann hat einem Tuchmacher folgende Wolle geliefert. Erstens 20 Centner

ner, 87 Pfund, 3 Vierling. Zweytens 38 Centner, 75 Pfund. Drittens 41 Centner, 3 Vierling. Endlich viertens 54 Centner, 68 Pfund, 1 Vierling. Wie viel macht alles aus? Der Centner zu 100 Pfund gerechnet.

Cent.	℔.	Vr.
20.	87.	3.
38.	75.	0.
41.	0.	3.
54.	68.	1.
155 Ctr.	31 ℔.	1 Vr.

II.

Durch die Subtraction.

§. 59.

Bey der Subtraction in benannten Zahlen ist nichts zu erinnern, und gelten die im vierten Abschnitt vorgetragene Regeln, daß nämlich wie bey der Addition gleichnahmige Größen ordentlich untereinander gesetzt werden müssen.

Zum Exempel.

	fl.	kr.	hl.
	88.	28.	3.
	15.	49.	7.
Rest	72 fl.	38 kr.	4 hl.

Der

Der unter dem Querstrich gesetzte Rest wurde auf folgende Weise gefunden; als: es sollten 7 hl. von 3 hl. abgezogen werden, weil aber dieses nicht angieng, so borgte man von den gegen die linke Hand aufnotirten Kreuzern einen Kreuzer; hiezu die 3 hl. addirt, machte die Summe also 11 hl. aus; und hierauf von der Summe 11 hl. die gegebene 7 hl. abgezogen, verblieben 4 hl. diese wurden unter den Querstrich in die Reihe der Heller gesetzt. Eben so konnten 49 kr. von 27 kr. nicht abgezogen werden; man mußte von den Gulden einen entlehnen, welcher 60 kr. hat, hiezu die 27 kr. addiren, und von der Summe 87 kr. alsdenn 49 kr. subtrahiren, wo 38 Rest blieben. Endlich wurde die Subtraction mit den Gulden vorgenommen, und betrug der ganze gesuchte Rest 72 fl. 38 kr. 4 hl.

Exempel zur Uebung.

	Ct.	℔.	Loth.	Quint.
	67.	13.	21.	2.
	58.	64.	29.	3.
Rest	8 Ct.	48 ℔.	23 Lt.	3 Qt.

Eym.	Mß.	Qrtl.
13.	12.	2.
10.	57.	3.
2 Eym.	18 Mß.	3 Qrtl.

Schff.

Schff.	Mtz.	Vrt.
16.	7.	2.
8.	7.	3.
7 Schff.	7 Mtz.	3 Vrt.

Einer ist schuldig 25 Gulden, 35 Kreuzer, und 2 Pfennige. Daran bezahlt er 15 Gulden, 24 Kreuzer. Was bleibt ihm noch zu bezahlen?

fl.	kr.	Pf.
25.	35.	2.
15.	24.	0.
10 fl.	11 kr.	2 dl.

Ein Haushalter hat dieses Jahr hindurch eingenommen 785 Gulden, 54 Kreuzer, und 3 Pfennige. Die Ausgabe des ganzen Jahrs beläuft sich auf 640 Gulden, und 3 Pfennige. Wie viel hat er vorgeschlagen?

fl.	kr.	Pf.
785.	54.	3.
640.	0.	3.
145. fl.	54 kr.	0 dl.

Eine Hauserinn hat von ihrer Frau bekommen 15 Gulden. Davon hat sie ausgegeben 5 Gulden, 7 Kreuzer; zweytens 2 Gulden und 5 Kreuzer; und drittens 26 Kreuzer,

zer, 3 Pfennige; was muß sie noch zurücke geben?

Einnahmen.	fl.	kr.	Pf.	Ausgaben. fl.	kr.	Pf.
	15.	0.	0.	5.	7.	0.
Sum.d.Ausg.	7.	38.	3.	2.	5.	0.
Rest : :	7 fl.	21 kr.	1 dl.	0.	26.	3.
				7 fl.	38 kr.	3 dl.

Ein Kaufmann hat 76 Centner, 87 Pfund Zucker gekauft; davon hat er verkauft 49 Centner, 89 Pfund, und 14 Loth. Wie viel hat er noch im Vorrath?

Cent.	℔.	Lt.
76.	87.	0.
49.	89.	14.
26 Cent.	97 ℔.	18 Lt.

Ein Bauer hat 168 Schaff Getreide aufbehalten. Von diesen verkauft er 65 Schaff, 6 Metzen, 3 Vierlinge. Wie viel behält er noch im Vorrath?

Sch.	Mtz.	Vr.
168.	0.	0.
65.	6.	3.
102 Sch.	1 Mtz.	1 Vr.

Die Sonne läuft den Frühling und Sommer über vom Widder bis in die Wag in 186

Tagen,

Tagen, 14 Stunden, und 53 Minuten; den Herbst und Winter durch von der Wage bis in den Widder in 178 Tagen, 14 Stunden, 56 Minuten. Wie viel ist das erste halbe Jahr größer als das andere?

T.	St.	Min.
186.	14.	53.
178.	14.	56.
7 Tag.	23 St.	57 Min.

Wenn ein fester Körper in eine flüßige Materie versenkt wird, so verliert er etwas an seiner Schwere. Gesetzt nun, man hätte einen Stein, der in der Luft 100 Pfund wäge. Nun hienge man selben an einem Stricke in das Wasser, und befände an der Wage, daß er nur noch 40 Pfund, 16 Loth, 3 Quintlein wäge. Wie viel würde er im Wasser von seiner Schwere verloren haben?

tb.	Lt.	Qt.
100.	0.	0.
40.	16.	3.
59 tb.	15 Lt.	1 Qt.

Man kann auch durch die Subtraction das Alter eines Menschen finden. Wobey zu merken ist, daß man in der obern Reihe immer die Zeit des Todes, in der untern Reihe hingegen die Zeit der Geburt ansetzen muß.

Zum

Zum Exempel.

Es ist Jemand im Jahre 1748, den 23. August, Abends um 3 Uhr gebohren worden; und gestorben im Jahre 1798, den 18. December, Morgens um 5 Uhr; wie alt wurde der Mensch?

1798 Jah.	12 Mon.	18 Tag.	5 Stun.
1748 =	8 Mon.	23 Tag.	15 Stun.
Alt. 50 Jahr.	3 Mon.	24 Tag.	14 Stun.

In der obern Reihe wurden bey der Zeit des Todes 12 Monat angesetzt, weil der December der zwölfte Monat im Jahr ist; in der untern Reihe hingegen 8 Monat, weil der August der achte Monat im Jahr ist. Desgleichen wurden bey der Zeit des Todes 15 Stunden angesetzt, weil der Tag um Mitternacht anfängt, und von da bis 3 Uhr Abends 15 Stunden verflossen sind. Bey der Subtraction mußte in der untern Reihe ein Tag, oder 24 Stunden entlehnt, oder geborgt, und hiezu 5 Stunden addirt, von der Summe 29 aber 15 abgezogen werden, wo alsdenn der Rest 14 Stunden blieb. Weil auch 23 Tag von 17 Tag nicht abgezogen werden konnten, so mußte ein Monat, welcher in diesem Exempel 30 Tag hat, denn der vorhergehende Monat November hat nur 30 Tag, geborgt werden. Diese 30 Tage zu 17 Tag addirt, ist die Summe 47 Tag, wovon 23 Tage ab-

gezogen werden können, und bleiben 24 Tage Rest. Hierauf 8 Monat von 11 Monat, und 1748 Jahr von 1798 Jahr abgezogen, verbleiben 50 Jahre, 3 Monate, 24 Stunden, für das gesuchte Alter.

Exempel zur Uebung.

Es wurde ein Mensch 1724, den 26. September Morgens um 1 Uhr gebohren; und starb derselbe 1763, den 2. Februar, Mittags um 12 Uhr, wie alt ist der Mensch geworden? Antwort: 48 Jahre, 4 Monate, 7 Tage, 11 Stunden.

III.

Durch die Multiplication.

§. 60.

Es sollen 15 fl. 54 kr. 7 Pf. mit 7 multiplicirt werden. Dieses kann auf dreyerley Weise geschehen.

1) Multiplicire man zuerst 7 Pfennige mit 7, so giebt das Produkt 49 Pf., und wenn man dasselbe mit 4 dividirt hat, so bekommt man 12 kr. und 1 Pf. Hierauf multiplicirt man 54 kr. mit 7, so giebt das Produkt 378 kr., hiezu die vorhingefundene 12 kr. addirt, so ist die Summe 390 kr.; dividirt man diese Zahl mit 60, so giebt der Quotient 6 fl. 30 kr.; endlich multipli-

tiplicire man auch 15 fl. mit 7., so ist das Produkt 105., addirt man dazu die so eben gefundene 6 fl. — so ist die Summe 111 fl. — und das ganze gesuchte Produkt ist 111 fl. 30 kr. 1 Pf.

2) Multiplicire man zuförderst 15 fl. mit 7, so giebt dieses zum Produkt 105 fl. — Da nun 54 kr. $\frac{9}{10}$ fl. ausmachen, so multiplicire man solche mit 7, so ist das Produkt $\frac{63}{10}$, oder $6\frac{3}{10}$ fl., die gefundene 6 fl. addire man zu dem vorher gefundenen Produkt, nämlich zu 105 fl. — so ist die Summe 111 fl. — und da $\frac{1}{10}$ fl. 6 kr. ausmacht, so sind $\frac{3}{10}$ zusammen 18 kr. Nun sind 7 Pf. eben soviel als $\frac{7}{4}$ kr., multiplicirt man dieselbe mit 7, so bekommt man $\frac{49}{4}$ Pf., oder mit 4 dividirt, giebt 12 kr. und 1 Pf., zu den vorhero gefundenen 18 kr. addire man nun die so eben berechnete 12 kr., so ist die Summe 30 kr., und weil weiter nichts mehr zu multipliciren vorhanden, so ist das ganze gesuchte Produkt 111 fl. 30 kr. 1 Pf.

Die 3te und auch gewöhnlichste Weise benannte Zahlen zu multipliciren ist folgende:

Es sollen nämlich 15 fl. 54 kr. 1 Pf. mit 7 multiplicirt werden; so mache man zuförderst die 15 fl. zu Kreuzer, das heißt, man multiplicire 15 mit 60, so giebt das Produkt 900 kr., hiezu addire man die nebenstehende 54 kr., so giebt die Summe 954 kr. Diese

Summe 954 mache man zu Pfennige mit 4, so giebt das Produkt 3816 Pf. hiezu die nebenstehende 1 Pf. addirt, so ist die Summe 3817 Pf. Diese ganze Summe 3817 multiplicire hierauf mit der gegebenen Zahl 7, so ist das Produkt 26719 Pf. Dieses Produkt dividire man mit 4, so bekömmt man 6679 kr., und 3 Pf. bleiben übrig; diesen Quotienten 6679 dividire man endlich mit 60 fl., so giebt der Quotient 111 fl., und 19 kr. bleiben übrig; folglich ist das ganze gesuchte Produkt 111 fl. 19 kr. 3 Pf.

Dieses Exempel steht in der Rechnung, wie folgt:

fl. 15. 54 kr. 1 Pf.
60.
———
900.
54.
———
954.
4.
———
3816.
1.
———
3817 Pf.
7 der gegebenen Zahl
———
4 | 26719 |
| 2333 |
———
6 | 667 | 9: 3 dl.
| 1 |
———
fl. 111: 19 kr. 3 Pf.

Exem-

Exempel zur Uebung.

Man soll 217 Centner, 83 ℔. 27 Loth mit 236 multipliciren, so ist das Produkt 51408 Centner, 58 ℔. und 1 Loth.

Man multiplicire 18 Schaff, 7 Metzen, und 3 Vierling mit $\frac{3}{4}$, so muß das Produkt 14 Centner, 1 Metzen, $3\frac{1}{4}$ Vierling seyn.

Man multiplicire 34 Eymer, 57 Maß mit $2\frac{1}{8}$, so muß zum Produkt 74 Eymer, $9\frac{1}{8}$ Maß herauskommen.

Eine Armee braucht monatlich für ihre Pferde 735 Schaff, 5 Metzen, und 2 Vierling Haber. Was braucht man in 6 Monaten?

	Sch.	Mz.	Vr.
	735.	5.	2.
			6.
die Prod. sind	4411 Sch.	7 Mz.	4 Vr.

Ein Speisemeister braucht täglich 3 Eymer, 25 Maß, und 3 Quärtlein Bier. Was braucht er in einer Woche?

	Eym.	Mß.	Qrt.
	3.	25.	3.
			7.
die Produkte sind	23 Eym.	50 Mß.	1 Qrt.

Eine Armee von 75000 Mann steht im Felde. Jedem Mann werden wochentlich

3 Pfund, und 2 Vierling Fleisches gereichet. Wie viel braucht man in 6 Wochen?

	℔.	Vr.
	3.	2.
		6.
die Produkte sind	21 ℔.	— Vr.

× 75000.

105.
147.

1575000 für alle zugleich
oder 15750 Centner.

Der Mond durchläuft in einer Stunde 32 Minuten, und 56 Secunden in seiner Laufbahne. Wie weit kömmt er in einem Tage?

	′	″
	32	56.
		24.
die Produkte sind	790.	24.

IV.

Durch die Division.

§. 61.

Es sollen fl. 405: 18 kr. 6 hl. durch 6 dividirt werden; es kann dieses auf zweyerley Art geschehen.

1) Divi-

1) Dividire man in fl. 405. — mit 6, so ist der Quotient fl. 67. — die übrig gebliebene fl. 3. mache man mit 60 zu Kreuzer, so ist das Produkt 180 Kreuzer; hiezu addire man die nebenstehende 18 kr., so ist davon die Summe 198 Kreuzer, mit 6 dividirt, giebt zum Quotient 33 Kreuzer; da nun nichts übrig geblieben, so dividire man endlich in die dabey stehende 6 hl. mit 6, so ist der Quotient 1 hl., und der ganze gesuchte Quotient beträgt fl. 67. 33 kr. 1 hl.

2) Verwandle man die fl. 405. 18 kr. 6 hl., wie oben bey der Multiplication gezeigt worden ist, in Heller, so ist die gefundene Zahl 194550. Diese dividire man mit 6, so ist der sich ergebende Quotient 32425 Heller. Diese dividire man mit 8, so kommen 4053 kr. heraus, und 1 hl. bleibt übrig; diese dividire man wieder mit 60, so giebt der Quotient. fl 67, und 33 kr. bleiben übrig; folglich ist der ganze gesuchte Quotient fl. 67. 33 kr. 1 hl.

Auf der nächstfolgenden Seite ist die Berechnung dieses Exempels nach seinem ganzen Inhalt detaillirt.

fl.	kr.	hl.
405.	18.	6.

60.

24300.
18 kr. addirt.

24318 kr.
8.

194544.
6 hl. addirt.

6 | 194550 hl.
1213

8 | 32425 hl.
1

6 | 0 kr. 405 | 3 : 1 hl.
43

fl. 67. 33 kr. 1 hl.

Exempel zur Uebung.

Man muß 243 Centner, 79 ℔. und 16 Loth mit 32 dividiren, so ist der Quotient 7 Centner, 61 ℔. und ½ Loth.

Man soll 11 Schaff, 6 Metzen, und 2 Viertel mit 14 dividiren, so muß der Quotient — Schaff, 6 Metzen, und 3 Viertel seyn.

Man soll 69 Eymer, 63 Maß mit 18¾ dividiren, so giebt der Quotient 3 Eymer, 46$\frac{22}{25}$ Maß.

Achter

Achter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 62.

Zwey Größen sind einander gleich, oder sie sind einander ungleich. Ist das letztere, und man soll ihre Ungleichheit bestimmen, so kann dieses auf zweyerley Weise geschehen; nämlich: erstens soll man bestimmen, um wie viel die eine Größe die andere übertreffe, oder zweytens, wie vielmal die eine Größe größer sey, als die andere. Beyde Bestimmungen nennt man ein Verhältniß; und zwar die erste, ein arithmetisches Verhältniß, und die zweyte, oder letztere, ein geometrisches Verhältniß.

§. 63.

Sollen von zwey Größen ihre Gleichheit, oder Ungleichheit angegeben werden, so folgt hieraus von selbst, daß die Größen von einerley Art seyn müssen.

§. 64.

Die Untersuchung, um wie viel die eine Größe größer als die andere ist, geschieht, daß man den Unterschied zwischen den beyden Grö-

sen, oder Zahlen bestimme; dahero ist ein arithmetisches Verhältniß nichts anders, als der Unterschied zwischen zweyen Zahlen.

§. 65.

Der Unterschied zwischen zweyen Zahlen aber wird gefunden, wenn man von der größern Zahl die kleinere Zahl abzieht. Folglich gehören zu Bestimmung eines arithmetischen Verhältnisses folgende drey Stücke, als: 1) die größere Zahl; 2) die kleinere Zahl; und 3) der Unterschied. Es haben aber diese drey Stücke eine solche Verbindung unter einander, daß man immer aus zwey derselben das dritte finden kann.

§. 66.

Will man aus einer gegebenen größern Zahl, nebst dem gegebenen Unterschied die kleinere Zahl finden, so ziehe man den Unterschied von der größern Zahl ab, so bekommt man die kleinere Zahl. Z. Ex.

Es sey die größere Zahl	= 5.
Der Unterschied	= 2.
So ist die kleinere Zahl	= 3.

§. 67.

Ist der Unterschied nebst der kleinern Zahl gegeben, so läßt sich die größere dadurch finden,

daß

daß man den gegebenen Unterschied zu der gegebenen kleinern Zahl addirt. Z. Ex. 4 sey der Unterschied, 3 die kleinere Zahl, so muß 7 die größere Zahl seyn.

$$4 + 3 = 7.$$

§. 68.

Sind aber sowohl die größere Zahl, als die kleinere Zahl gegeben, so erhält man den Unterschied, wenn man die kleinere Zahl von der größern abzieht. Z. Ex.

6. sey die größere Zahl,
2. — die kleinere Zahl,

so ist 4 der Unterschied.

$$6 - 2 = 4.$$

§. 69.

Wird zu den beyden gegebenen Zahlen eine andere beliebige Zahlen addirt, oder davon subtrahirt, so bleibt der Unterschied der nämliche.

Z. Ex.

Man addire zu den vorhin gegebenen Zahlen 6 und 2 eine andere Zahl, nach Belieben 8, so ist $6 + 8 - 2 + 8 = 4$ der Unterschied.

§. 70.

Sind zwey arithmetische Verhältnisse einander gleich, so heißt diese Gleichheit, eine arithmetische Proportion.

§. 71.

§. 71.

Aus diesem erhellet deutlich, daß eine jede arithmetische Proportion aus vier Gliedern zusammen gesetzt ist, welche so beschaffen sind, daß, wenn man das zweyte von dem ersten abzieht, der nämliche Rest herauskömmt, als hätte man das vierte von dem dritten abgezogen.

Z. Ex.

18 — 5 = 2 — 7.

Anmerkung.

Diese vier Glieder einer arithmetischen Proportion können auf acht verschiedene Weise versetzt werden, ohne daß sie deswegen aufhören sollten, einander proportionirt zu seyn, wie

Zum Exempel.

18 — 5 = 20 — 7.
18 — 20 = 5 — 7.
5 — 18 = 7 — 20.
5 — 7 = 18 — 20.
20 — 18 = 7 — 5.
20 — 7 = 18 — 5.
7 — 5 = 20 — 18.
7 — 20 = 5 — 18.

§. 72.

Eine jegliche arithmetische Proportion hat auch überdem noch die Haupteigenschaft, nämlich,

lich, daß die Summe des zweyten und dritten Gliedes eben so groß ist, als die Summe des ersten und vierten Gliedes.

Zum Exempel.

18 — 5 = 20 — 7
18 + 7 = 25 und 5 + 20 = 25.

§. 73.

Sind in einer arithmetischen Proportion drey Glieder gegeben, so läßt sich nach dem vorigen §. leicht das vierte Glied finden. Denn man darf nur das zweyte und dritte Glied zusammen addiren, und von dieser Summe das erste Glied abziehen, so hat man das vierte Glied.

Zum Exempel.

Es sey das erste Glied = 17.
das zweyte — = 12.
das dritte — = 19.

So ist die Summe des zweyten und dritten = 31. hievon das erste Glied = 17 abgezogen.
so ist 14. das vierte Glied:
und die arithmetische Proportion:
17 — 12 = 19 — 14.

§. 74.

Im 62. §. ist bereits erklärt worden, daß ein geometrisches Verhältniß sey, welches be=

stim=

stimme, um wie vielmal eine Größe größer sey, als eine andere. Dieses findet man, wenn man die eine in die andere dividirt, wo alsdenn der Quotient die Benennung des Verhältnisses anzeigt.

§. 75.

Das geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen anzuzeigen, bedient man sich zweyer über einander gesetzten Punkte, wie bey der Division.

§. 76.

Bey einem geometrischen Verhältniß sind drey Stücke in Acht zu nehmen. Erstlich, die erste von den beyden gegebenen Zahlen, welche der Vorsatz, Antecedens, heißt. Zweytens, die andere von den beyden gebenen Zahlen, welche der Nachsatz, Consequens, genennt wird; und drittens, die Benennung des Verhältnisses der Exponent, welches man finden kann, wenn man den Vorsatz durch den Nachsatz dividirt. Z. E. Es soll zwischen 36 und 9 das Verhältniß bestimmt werden; so ist 36 der Vorsatz, 9 der Nachsatz, und die Benennung des Verhältnisses wird seyn 36 : 9 = 4; welches anzeigt, daß der Vorsatz den Nachsatz viermal in sich enthalte.

§. 77.

Eine geometrische Proportion ist nichts anders, als die Gleichheit zweyer geometrischen Verhältnisse. Z. Ex.

24 : 8 = 18. 6.

§. 78.

Eine jede geometrische Proportion besteht aus vier Gliedern, welche die Eigenschaft haben müssen, daß, wenn man das erste durch das zweyte dividirt, eben soviel herauskommen muß, als wenn man das dritte durch das vierte dividirt; auch lassen sich die vier Glieder einer geometrischen Proportion auf acht verschiedene Weise versetzen, ohne daß sie deßwegen aufhören sollten, einander proportionirt zu seyn; wie

Zum Exempel.

24 : 8 = 18 : 6.
24 : 18 = 8 : 6.
8 : 24 = 6 : 18.
8 : 6 = 24 : 18.
18 : 24 = 6 : 8.
18 : 6 = 24 : 8.
6 : 8 = 18 : 24.
6 : 18 = 8 : 24.

§. 79.

Hieraus fließt ganz deutlich die sehr wichtige Haupteigenschaft, daß das Produkt aus

dem

dem ersten nnd vierten Glied, dem Produkte aus dem zweyten und dritten Glied beständig gleich seyn muß, oder daß das Produkt der beyden äußern Glieder dem Produkte der beyden innern Glieder gleich seyn. Z. Ex.

I. II. III. IV.

1 ; 2. = 24 : 6.

I 8 × IV 6 = 48. oder II 2 × III 24 = 48.

§. 80.

Aus dieser Haupteigenschaft folgt ganz deutlich, daß, wenn die drey ersten Glieder einer geometrischen Proportion gegeben sind, man leicht das vierte finden könne. Denn man darf nur die beyden mittlern Glieder mit einander multipliciren, und mit dem ersten Glied in dieses Produkt dividiren, so giebt der Quotient das vierte Glied. Z. Ex. Es seyen die drey ersten Glieder 8 : 2 = 24. zu : : fl. ist das Produkt der beyden mittlern Glieder von
II III
2. 24 = 48. hierein mit dem ersten Glied = 8 dividirt, so giebt der Quotient 6 das gesuchte vierte Glied, und folglich ist die geometrische Proportion, 8 : 2 = 24 : 6. und hierauf beruhet der Grund der so berühmten Regel De-tri.

Neunter Abschnitt.

Von der Regel De-tri überhaupt.

§. 81.

Die Regel De-tri ist diejenige Vorschrift, nach welcher aus drey gegebenen Zahlen allezeit eine solche vierte Zahl gesucht wird, welche mit jenen in einer geometrischen Proportion stehet, so, daß sich die erste Zahl verhalte zur zweyten, wie die dritte Zahl zur vierten.

§. 82.

Die Vorschriften der Regel De-tri, wenn man dieselbe überhaupts betrachtet, bestehet darinn, daß man 1) die drey gegebenen Zahlen sammt der unbekannten in eine solche Proportion bringe, damit das unbekannte Glied immer das vierte Glied werde; und

2) daß man alsdenn die beyden mittlern miteinander multiplicire, und mit der ersten in das Produkt dividire.

§. 83.

Die Vorschriften der Regel De-tri, wenn man dieselben insonderheit betrachtet, sind 1) daß man bey benannten Zahlen, welche hier vorzüglich vorkommen, die Glieder der Verhältnisse, so dieselben aus verschiedenen

Einheiten bestehen, in die kleinsten Einheiten von einerley Benennung verwandle; auch wenn Brüche vorkommen, dieselbe einrichte. Z. Ex. Es bestünde ein Glied aus Gulden, Kreuzer und Heller, so verwandle man solches in lauter Heller. Befindet sich bey den Hellern ein Bruch, so multiplicire man solche mit dem Nenner des Bruches, addire den Zähler dazu, und setze den Nenner wieder darunter.

2) Muß das unbekannte Glied, wenn man es gefunden hat, die nämliche Benennung bekommen, welche das dritte Glied hat. Z. Ex. Es sey das dritte Glied Pfunde, so muß das vierte auch Pfunde seyn.

§. 84.

Die Regel De-tri wird in zwey Haupttheile abgetheilt, und heißt die erste davon die einfache, oder eigentliche Regel De-tri; die andere hingegen die zusammengesetzte Regel De-tri.

§. 85.

Die einfache Regel De-tri nennt man diejenige, wenn drey Glieder aus einer einzigen Proportion gegeben sind, und in welcher man das vierte unbekannte Glied suchen soll.

§. 86.

Die zusammengesetzte Regel De=tri besteht darinn, wenn mehrere Glieder aus verschiedenen Proportionen gegeben sind, dazu ein oder mehrere unbekannte Glieder gesucht werden sollen.

§. 87.

Die zusammengesetzte Regel De=tri wird wieder in drey besondere Theile abgetheilt; als: 1) in die Regel von Fünfen, oder de Quinque, wenn fünf Glieder aus zwey verschiedenen Proportionen gegeben sind.

2) In die Ketten=Regel, wenn Glieder aus mehrern Proportionen gegeben sind; und

3) In die Gesellschafts=Rechnung, wenn Gewinn und Verlust unter mehrern nach dem Verhältniß dessen, was sie zusammen geschossen haben, getheilt werden soll.

§. 88.

Diese letztere, nämlich die Gesellschafts=Regel hat wieder ihre Unterabtheilungen; als:

a) Die Vermischungs=Regel, in welcher gefunden wird, wie viel aus den gegebenen Verhältnissen einzelner Materien von jeder zu einer gegebenen vermischten Menge genommen werden muß; und

b) Die Falsi=Rechnung, in welcher die unbekannten Glieder der Proportionen nach

gegebenen Verhältnissen willkührlich angenommen werden, ehe und bevor man ihre wahre Größe herausbringen kann.

§. 89.

Man theilt auch sowohl die einfache als die zusammengesetzte Regel De=tri in die gerade und umgekehrte Regel De=tri ein. Die erste begreift diejenigen Exempel in sich, in welchen die drey gegebenen Glieder der Proportionen so aufeinander folgen, daß das unbekannte Glied das vierte Glied ist. Die andere aber begreift diejenigen Exempel in sich, in welchen die drey gegebenen Glieder erst versetzt werden müssen, um das unbekannte Glied zum vierten machen zu können.

Zehnter Abschnitt.

Von der einfachen Regel De=tri, und zwar, a) der geraden oder direkten Regel De=tri.

§. 90.

Die Exempel, welche in der geraden oder direkten Regel De=tri vorkommen, werden eingetheilt.

1) In solche, welche im ersten Grad 1 haben; und zwar mit einer solchen Benennung, die im zweyten Glied allein vorkommt; oder

oder unter welche das zweyte Glied gebracht werden kann; in diesem Falle darf man nur das zweyte und dritte Glied mit einander multipliciren, so giebt das Produkt das vierte Glied, weil mit 1 nicht dividirt wird.

2) In solche, welche im zweyten und dritten Glied 1 haben, wo man alsdenn nur mit dem ersten Glied in das zweyte oder dritte Glied dividiren darf, weil mit 1 nicht multiplicirt wird; und

3) in solche, welche in allen gegebenen Gliedern mehrere Einheiten haben, wobey die beyden mittlere Glieder in einander multiplicirt werden müssen, und das Produkt durch das erste Glied dividirt werden muß.

Exempel zu Nro. 1.

Es kostet 1 ℔. Coffee fl. — 52 kr.
Wie viel kosten 12 ℔. Coffee?
Das erste Glied ist 1.
Das zweyte : : 12.
Das dritte : : fl. — 52 kr.

Wenn man also das zweyte mit dem dritten multiplicirt, so giebt das Produkt 624 kr. oder 10 fl. 24 kr., und weil mit 1 nicht dividirt wird, so bleibt das Produkt die Antwort auf die vorgelegte Frage; und das Exempel wird stehen, wie folgt:

℔. ℔. kr. fl. kr.
1 : 12 = 52 : 10. 24.
12
104
52
6|0|62|4 fl. 10. 24 kr.

2) Es koste 1 ℔. Zucker 40 kr. wie hoch kommen 18 ℔. Zucker zu stehen? Antwort 10 fl. 20 kr.

3) Eine Elle Leinwand koste 36 kr. was gelten $13\frac{1}{2}$ Elle? Antwort 8 fl. 6 kr.

4) 1 ℔. Weinbeer koste 20 kr. was kosten 2 Ct.? Antwort 66 fl. 40 kr.

℔. Ct. kr. fl. kr.
1. : 2 = 20 : 60 : 40.
200 ℔.
20.
6|0 400|0.
44

In diesem Exempel müssen die 2 Ct. erst zu ℔. gemacht werden, da denn solche 200 ℔. geben, multiplicirt man diese mit dem dritten Glied, so ist das Produkt 4000 kr. diese betragen nach der Reduction 66 fl. 40 kr., und weil mit 1 nicht dividirt wird, so ist das gesuchte vierte Glied 66 fl. 40 kr.

5) Wenn 1 Loth $5\frac{3}{4}$ kr. kostet; was kosten 3 ℔. $26\frac{3}{4}$ Lt.? Antwort 11 fl, $45\frac{13}{16}$ kr.

Lt.

Lt. ℔. Lt.

1 : 3 : $26\frac{3}{4}$ = $5\frac{3}{4}$ kr.

```
      32              23
   122 3/4             4
     491
      4   491
           23
          1473
          982 6|0
  16| 11293|70|5 13/16|  11 fl. 45 13/16 kr.
      112
      ...93
         80
         13
         16
```

6) Um 1 fl. hat man gekauft $\frac{5}{12}$ Ellen Tuch; wie hoch kommt $\frac{1}{4}$ Elle zu stehen? Antwort $\frac{5}{48}$ fl.

7) Wenn eine Person des Tags $1\frac{2}{5}$ fl. — verzehrt; wie viel braucht diese Person in einem Jahr, oder in 365 Tagen? Antwort 511 fl. —

8) Ein Taglöhner verdient alle Tage $\frac{3}{5}$ fl. wie viel kann er in $11\frac{1}{2}$ Wochen, die Woche zu 6 Werktagen gerechnet, verdienen? Antwort $41\frac{2}{3}$ fl.

9) 1 Elle feines blaues Tuch um 11 fl. — wie theuer kommen $7\frac{1}{2}$ Ellen zu stehen? Antwort 82 fl. 30 kr.

10) 1 ℔. um 17 kr., wie theuer kommen 60 ℔.? Antwort 17 fl.

11) 1 Vierling schön Mehl um 40 kr., wie hoch kommt das Schaff? Antwort 21 fl. 20 kr.

12) 1 Fuder Wein um 310 fl., wie hoch kommen 6 Fuder? Antwort 1860 fl.

Exempel zu Nro. 2.

1) Es kosten 24 Ellen 50 fl. — was kostet 1 Elle? Antwort $2\frac{1}{12}$ fl.

Ellen		Elle		fl.		fl.
24	:	1	=	50	:	$2\frac{1}{12}$.

2) 5 Ct. Coffee kosten 375 fl. — kr., was kostet 1 Ct.? Antwort 75 fl. — kr.

Ct.		Ct.		fl.		fl.
5	:	1	=	375	:	75.

```
375 : 75.
35
——
 25
 25
——
 ..
```

3) 13 Eymer Wein kosten $422\frac{1}{2}$ fl., was gilt 1 Eymer? Antwort $32\frac{1}{2}$ fl.

4) $19\frac{3}{4}$ Schaff Roggen gelten 325 fl. $32\frac{3}{4}$ kr., was kostet 1 Schaff Roggen? Antwort 16 fl. 29 kr.

5) 34 Pfund 3 Loth Flachs kosten 17 fl. $19\frac{55}{64}$ kr., was kostet 1 Pf. Flachs? Antwort $30\frac{1}{2}$ kr.

6)

6) $\frac{7}{8}$ Ct. um $\frac{5}{6}$ fl., wie theuer kommt 1 Pf.? Antwort $1\frac{1}{20}$ fl.

7) Um 82 fl. 30 kr. bekommt man $7\frac{1}{2}$ Elle, wie hoch kommt 1 Elle? Antwort 11 fl.

8) 1 Mark Silber kostet 14 fl. 56 kr., wie theuer kommt 1 Loth? Antw. 56 kr.

9) 1 Schaff schön Mehl um 21 fl. 20 kr., was kostet 1 Vierling? Antwort 40 kr.

10) 60 ℔. um 17 fl. —, was gilt 1 ℔.? Antwort 17 kr.

Exempel zu Nro. 3.

1) 5 Pf. kosten 12 fl., was kosten 15 Pf.? Antwort 36 fl. —

```
Pf.   Pf.      fl.   fl.
 5  :  15  =  12  :  36.
       12
     ------
       30
      15
  -----------
  5 : 180 | 36
      15
    ------
      30
```

2) 3 Centner, 57 Pfund, 19 Loth kosten 273 fl. — kr., wie kommen 3 Centner, 34 Pfund und 31 Loth zu stehen? Antwort $198\frac{3773}{10343}$ fl.

3) 7 Ellen um $9\frac{1}{2}$ fl., wie hoch kommen 91 Ellen? Antwort $123\frac{1}{2}$ fl.

4) $\frac{7}{8}$ Ellen um 15 fl. 27 kr. 4 hl., wie hoch kommen $\frac{15}{16}$ Ellen? Antw. 16 fl. 33 kr. 6 hl.

5) $\frac{5}{12}$ Pf. um $\frac{7}{12}$ fl., wie hoch $\frac{15}{16}$ Pf. Antw. 1 fl. 18 kr. 3 pf.

6) Um $\frac{3}{4}$ fl. bekommt man $\frac{4}{5}$ Pf. wie viel bekommt man um $\frac{5}{8}$ fl.? Antw. $\frac{2}{3}$ Pf.

7) 3 Ctr. 13 ℔. 2 Vierl. 4 Lt. um 315 fl. 24 kr., wie hoch kommen 34 Ctr. 49 ℔. 3 Vr. 4 Lt.? Antw. 3469 fl. 26 kr. 6 hl.

8) 14 ℔. um $18\frac{2}{3}$ fl., wie theuer sind 60 ℔.? Antw. 80 fl.

§. 91.

4) Der umgekehrten Regel De = tri.

Nach der im §. 89. gegebenen Erklärung von der umgekehrten Regel De = tri besteht dieselbe darinn, daß man die drey gegebene Glieder erst versetze; um das unbekannte Glied zum vierten machen zu können.

Zum Exempel.

Es haben 20 Personen an einem Graben täglich 5 Ellen ausgegraben, wie viel braucht man Personen, daß an dem Graben täglich 100 Ellen ausgegraben werden? Würde man

bey

bey dieser Aufgabe die Glieder der Proportion in derjenigen Ordnung ansetzen, in welcher sie gegeben sind, und auf solche Weise das vierte Glied suchen, so gäbe der Quotient 25 Personen. Es ist aber augenscheinlich klar, daß 25 Personen nicht im Stande sind, 100 Ellen auszugraben, da 20 Personen nur 5 Ellen ausgraben können. Man muß daher untersuchen, welches Glied von den drey gegebenen in der Proportion fehlt; wobey es sich nach genauer Ueberlegung zeigt, daß das zweyte Glied fehlt. Denn 5 Ellen verhalten sich zu 100 Ellen, wie 20 Personen sich verhalten zu der gesuchten Anzahl von Personen. Man setzt also das letzte Verhältniß voran, damit das fehlende Glied das vierte werde; und die Rechnung ist demnach folgende:

Ellen Ellen Person. Person.
5 : 100 = 20 : 400 vierte unbekannte Glied.

```
      20
   ------
5 | 2000 | 400
  |  ..  |
  |  20  |
   ------
```

2) 6 Taglöhner verfertigen in 8 Tagen eine gewisse Arbeit, wie lange haben 12 Arbeiter daran zu thun? Antw. 4 Tage.

3) 1000 Soldaten sind auf 6 Monate verproviantirt, wie lange brauchen 500 Soldaten zu diesem Vorrath? Antw. 12 Monate.

4) 2 Schuhmacher verfertigen in einem Tage 3 Paar Schuhe. Es sollen aber in einem Tage 50 Paar Schuhe fertig werden, wie viel braucht man hierzu Schuhmacher? Antwort 33 Schuhmacher.

Paar		Paar		Schuster		Schuster
3	:	50	=	2	:	33.
		2				

3 | 100 | 33 Schuster.

5) Zu einem Kleide braucht man 5 Ellen Tuch, wenn dasselbe $\frac{7}{4}$ Ellen breit ist; wie viel Ellen aber werden erfordert, wenn dasselbe nur $\frac{6}{4}$ Ellen breit ist? Antw. $5\frac{5}{6}$ Ellen.

6) Ein Bothe geht alle Tage 5 Meilen, und kommt in 12 Tagen an Ort und Stelle; ein anderer Both soll in 8 Tagen in dem nämlichen Ort eintreffen, wie viel Meilen muß derselbe des Tags machen? Antw. $7\frac{1}{2}$ Meile.

Anmerkung.

Da nicht nur jedes Land, sondern auch wohl oft eine jede Stadt ihr eigenes Maaß und Gewicht hat; und es doch öfters höchst nothwendig ist, daß man die Verhältnisse gegen einander wissen muß, um die Maaße und Gewichte des einen Lands zu den Maaßen und Gewichten des andern Landes reduciren zu können, so sind folgende Tabellen, worinnen die Verhältnisse der Maaße angegeben sind, sehr nützlich; als

Ver=

Vergleichung der Schuhe verschiedener Oerter nach dem Pariser Schuh.

Wenn der Pariser Schuh in 1440 gleiche Theile abgetheilt wird, so hat

der Achner	128, 5.
Amsterdamer	125, 0.
Anspacher	132, 0.
Antwerper	126, 6.
Augsburger	131, 3.
Avignoner	110, 0.
Baseler	132, 2.
Bayrischer	128, 0.
Berliner	137, 3.
Berner	130, 1.
Bologner	168, 2.
Braunschweiger	126, 5.
Bremer	128, 2.
Breslauer	126, 0.
Brüßeler	129, 0.
Cairo	245, 9.
China	147, 7.
Cleve	131, 0.
Cölner	122, 0.
Constantinopoler	314, 0.
Coppenhager	139, 1.

der

der Cracauer	185, 0.
Dordrecher	159, 6.
Danziger	127, 2.
Dresdner	125, 5.
Egypner	245, 9.
Engländer	135, 1.
Frankfurter am Mayn	127, 0.
Frankreich	144, 0.
Genfer	216, 3.
Gibralter	125, 3.
Gießner	132, 0.
Griechischer	135, 8.
Gröninger	129, 5.
Hager, in Holland	144, 0.
Haller	132, 0.
Hamburger	127, 0.
Hannover	128, 5.
Hebräischer	159, 0.
Heydelberger	123, 5.
Hildesheimer	124, 2.
Hollsteiner	132, 3.
Insprucker	140, 8.
Königsberger	136, 4.
Leidener	139, 0.
Leipziger	125, 3.

der

der Lioner	151, 5.
Lissaboner	150, 1.
Löwener	126, 6.
Londner	135, 1.
Lothringer	129, 1.
Lübecker	129, 0.
Lütticher	127, 5.
Manheimer	128, 6.
Mantuaner Bracci	206, 2.
Maynzer	133, 5.
Mechelner	123, 9.
Mecklenburger	129, 0.
Mildelburger	133, 0.
Münchner	128, 2.
Neapel, Palmi	116, 9.
Nürnberger	134, 7.
Oldenburger	131, 3.
Osnabrücker.	123, 8.
Pariser, Toises	864, 0.
Königl. Schuh	144, 0.
Persianer Arish	431, 0.
Pommernscher	129, 5.
Prager	133, 8.
Rivaler	118, 7.
Rheinländische	139, 1.

der Rigaische	: : :	121, 5.
Römische, Baucanne	:	990, 0.
— — Schuh	:	120, 6.
— — Palm :	:	99, 0.
— — alter Schuh	:	132, 0.
Rostocker	: : :	128, 2.
Rotterdamer	: :	138, 5.
Rußländischer	: :	238, 6.
Sardinien	: :	
Palm, di Sardegna	:	111, 3.
Cagliari	:	89, 8.
Schwedischer, Faden	:	789, 6.
— — — Schuh	:	131, 6.
Spanischer, Schuh	:	125, 3.
— — — Palmos	:	94, 0.
Stettiner	: : :	125, 3.
Stockholmer	: :	131, 6.
Straßburger	: :	128, 3.
Stuttgarder	: :	126, 8.
Turiner	: : :	143, 2.
Ulmer	: : :	128, 1.
Utrechter	: : :	121, 0.
Venediger	: : :	154, 0.
Veronaer	: : :	154, 0
Wiener	: : :	142, 0.

der

der Wittenberger : :	148, 5.
Zeller : : :	129, 2.
Züricher : : :	133, 1.

Vergleichung der vornehmsten Europäischen Meilen.

Nach geometrischen Schritten zu 5 Schuh.

	Schritte.
Eine Rußische Meile : :	750.
— Italienische : :	1000.
— Engelländische : :	1250.
— kleine Französische :	2000.
— gemeine : :	2500.
— große : : :	3000.
— Polnische : :	3000.
— Spanische : :	3428.
— Schwedische : :	5000.
— Dänische : :	5000.
— Ungarische : :	6000.
— Deutsche : :	4000.

Nach dem Rheinländischen Schuh.

	Rheinländ. Sch.
Eine Böhmische Meile mißt, :	22017.
— Burgundische : :	18016.
— Churbraunschweigische :	33737.

		Rheinländ. Sch.
Eine	Dänische Meile mißt	24000.
—	Deutsche oder Germanische	14197.
—	: neue :	20000.
—	: gemeine :	
—	: Geometrische	23661.
—	Französischer (Leuke)	7042.
—	— (Lieue)	14197.
—	kleine von 2000 Toisen	12418.
—	große von 2500 :	15523.
—	Großbrittanische, alte Brittische	7456.
—	neue Englische zu 1760 Yards	513.
—	Hamburger	24000.
—	Holländische	18680.
—	Irländische	6536.
—	Italienische	5915.
—	Londner von 1666⅔ Yards	4862.
—	Polnische	17745.
—	Portugiesische	19717.
—	Preußische	24700.
—	Römische von 8 olymp. Stadien	4701.
—	Rußische von 1500 Arschin	3402.
—	Säsische Polizey-Meile von 16000 Dresdner Ellen	28878.
—	Schlesische von 11250 Schlesischen Ellen	20658.

Eine

	Rheinländ. Sch.
Eine Schottländische von 1147 franz. Klaftern	7119.
— Schwedische von 18000 Schwed. Ellen	34094.
— Schweizerische	26888.
— Spanische oder Kastilianische von 2147 franz. Klaftern	13328.
— Stadien Olympische	591.
— Ungarische	26625.

Vergleichung der Ellen von verschiedenen Oertern.

100 Pariser Ellen machen

zu Amsterdam	$173\frac{1}{2}$.
— Antwerpen	$171\frac{3}{4}$.
— Avignon	100 –.
— Augsburg	$208\frac{3}{4}$.
— Basel	$208\frac{3}{4}$.
— Barcellona	$72\frac{1}{4}$.
— Bergen	$190\frac{3}{4}$.
— Bern	$216\frac{2}{3}$.
— Bourdeaux	$101\frac{1}{2}$.
— Bretagne	$85\frac{3}{4}$.
— Bremen	$208\frac{3}{4}$.
— Breslau	$217\frac{1}{3}$.

zu Brüßel	$171\frac{3}{4}$.
— Cadix	$138\frac{3}{4}$.
— Cambray	$159\frac{1}{2}$.
— Castilien	$138\frac{3}{4}$.
— Cölln	$208\frac{3}{4}$.
— Constantinopel	178 -.
— Coppenhagen	$194\frac{3}{4}$.
— Dresden	$206\frac{1}{4}$.
— Drontheim	190 -.
— Dublin und Edinburg	130 -.
— Florenz	199 -.
— Genua	$476\frac{4}{11}$ Palmi.
10 Palmi machen in Seide	9 -.
in Wolle 8. — in Leinwand	1 -.
— Frankfurt	$208\frac{3}{4}$.
— Genf	104 -.
— Harlem	$173\frac{1}{2}$.
— Hamburg	$208\frac{3}{4}$.
— Haag	$174\frac{1}{2}$.
— Ostindien	260 -.
— Königsberg	$208\frac{3}{4}$.
— Lausanne	$111\frac{1}{9}$.
— Leiden	$173\frac{1}{2}$.
— Leipzig	$208\frac{3}{4}$.
— Lenzburg	$190\frac{1}{2}$.
— Lille	169 -.

zu

zu Lion	:	:	:	102 –.
— Lissabon	:	:	:	173 1/2.
— Livorno	:	:	:	199 –.
— London in wollenen Stoffen			:	128 –.
: in Leinwand			:	100 –.
— Lübeck	:	:	:	208 –.
— Lucca	:	:	:	199 –.
— Lucern	:	:	:	208 3/4.
— Madrit	:	:	:	138 3/4.
— Mantua	:	:	:	182 1/2.
— Marseille	:	:	:	100 –.
— Meßing	:	:	:	59 –.
— Mayland in Wolle			:	177 –.
— : in Seide			:	222 3/4.
— Minden	:	:	:	288 –.
— Modena	:	:	:	182 1/2.
— Montpellier		:	:	60 –.
— Nantes	:	:	:	85 3/4.
— Neapel	:	:	:	101 1/2.
— Neuschatell		:	:	107 –.
— Norwegen		:	:	173 1/2.
— Nürnberg		:	:	173 1/2.
— Osnabrück		:	:	100 –.
— Palermo	:	:	:	59 –.
— Parma	:	:	:	214 3/4.
— Picardie	:	:	:	145 –.

zu Prag	198½.
— Riga	210¼.
— Rochelle	100 –.
— Rom in Wolle	173½.
in Leinwand	58 –.
— Rouan in Seide	100 –.
in Leinwand	83⅓.
— Rußland	164 –.
— St. Gallen in Leinwand	149¼.
in Wollen	194¾.
— Schweiz, Kanton	208 –.
— Smirna	175 –.
— Stockholm	199 –.
— Straßburg	208 –.
— Toulouse	66⅔.
— Turin	197½.
— Valentia	130 –.
— Venedig in Tüchern	179 –.
in Gold- und Silberstoff	190 –.
— Unterwalden, Uri	208 –.
— Ulm	208¾.
— Wien	149 –.
— Zopfingen	100 –.
— Zürch	199 –.

Ver-

Vergleichung der Gewichte verschiedener Oerter.

100 Pfund zu Genf machen

zu	Achen	:	$117\frac{11}{6}$.
—	Alikante	:	110—.
—	Amsterdam	:	$111\frac{11}{16}$.
—	Antwerpen	:	$117\frac{11}{16}$.
—	Augsburg	:	$112\frac{3}{8}$. schwer.
	:	:	$116\frac{11}{16}$. leicht Gew.
—	Basel	:	$110\frac{1}{4}$.
—	Bautzen	:	$127\frac{1}{4}$.
—	Bergamo	:	190. leicht.
	—	:	$76\frac{1}{4}$. schwer.
—	Bergen op Zoom		$119\frac{5}{8}$.
—	Berlin	:	$117\frac{7}{8}$.
—	Bern	:	$114\frac{3}{4}$.
—	Bologna	:	$152\frac{1}{16}$.
—	Bourdeaux	:	$112\frac{1}{4}$.
—	Bremen	:	$112\frac{1}{16}$.
—	Breslau	:	$136\frac{1}{8}$.
—	Braunschweig		$118\frac{3}{16}$.
—	Brüßel	:	$117\frac{11}{16}$.
—	Cadix	:	$120\frac{15}{16}$.
—	Cölln	:	$118\frac{3}{16}$.
—	Constantinopel		$43\frac{1}{2}$.
—	Coppenhagen	:	$117\frac{5}{8}$.

zu Cracau :	136 1/4.	
— Danzig :	126 11/16.	
— Dordrecht :	112 1/2.	
— Dublin :	109 1/8.	
— Dünkirchen :	131 13/16.	
— Edimburg :	109 1/8.	
— Florenz :	162 5/8.	
— Frankfurt am Mayn	118 1/8.	
— Gent :	118 7/8.	
— Genua : :	103 1/2.	schwer Gew.
: :	174 1/4.	leicht Gew.
— Halle : :	118 —.	
— Hamburg :	113 3/4.	
— Königsberg :	144 1/16.	alt Gew.
: :	117 1/4.	neu Gew.
— Leipzig : :	118 3/16.	
— Lille : :	128 1/4.	
— Lindau :	120 1/8.	
— Lion : :	131 13/16.	
— Lissabon : :	120 3/16.	
— Livorno : :	161 15/16.	
— London : :	122 —.	
— Lübeck : :	114 1/8.	
— Lüttich : :	118 3/4.	
— Lucca : :	165 3/8.	
— Lüneburg : :	113 7/16.	

zu Madrid	=	$128\frac{1}{4}$.	
— Magdeburg	=	$17\frac{1}{2}$.	
— Mallaga	=	$120\frac{3}{16}$.	
— Mantua	=	$194\frac{5}{8}$.	
— Marſeille	=	$133\frac{3}{8}$.	
— Meßina	=	175—	leicht Gew.
= =	=	64—	ſchwer.
— Modena	=	162—.	
— Montpelier	=	135—.	
— Moskau	=	$134\frac{7}{8}$.	
— München	=	$98\frac{3}{4}$.	
— Mexico	=	$120\frac{3}{8}$.	
— Nancy	=	$119\frac{1}{4}$.	
— Nantes	=	$111\frac{1}{2}$.	
— Neapel	=	$129\frac{15}{16}$.	
— Naumburg	=	$118\frac{1}{8}$.	
— Nürnberg	=	109—.	
— Palermo	=	175—.	leicht Gew.
— Paris	=	$112\frac{1}{2}$.	
— Petersburg	=	135—.	
— Prag	=	$107\frac{3}{8}$.	
— Regensburg	=	$98\frac{3}{8}$.	
— Riga	=	$131\frac{15}{16}$.	
— Rochelle	=	$111\frac{1}{2}$.	
— Rom	=	$163\frac{7}{8}$.	leicht
= =	=	$64\frac{1}{2}$.	ſchwer.

zu	Rotterdam	=	112$\frac{1}{2}$.	
—	St. Gallen	=	94$\frac{3}{8}$.	
—	Salzburg	=	98$\frac{9}{16}$.	
—	Schafhausen	=	120$\frac{1}{16}$.	
—	Smirna	=	97$\frac{7}{8}$.	
—	Stettin	=	123$\frac{3}{4}$.	
—	Stockholm	=	131$\frac{5}{8}$.	
—	Straßburg	=	117—.	
—	Toulouse	=	132$\frac{3}{4}$.	
—	Triest	=	98$\frac{3}{16}$.	
—	Turin	=	150—.	
—	Ulm	=	117$\frac{11}{16}$.	
—	Valencia	=	178$\frac{1}{4}$.	
—	Venedig	=	115$\frac{11}{16}$.	schwer
	=	=	183—.	leicht
—	Verona	=	110$\frac{15}{16}$.	schwer
	=	=	166$\frac{9}{16}$.	leicht
—	Warschau	=	146—.	
—	Wien	=	98$\frac{3}{16}$.	
—	Wittenberg	=	117$\frac{15}{16}$.	
—	Zittau	=	117$\frac{15}{16}$.	
—	Zürch	=	104$\frac{3}{8}$.	
—	Zurzach	=	105.—	

Vergleichung des alten jüdischen Längenmaaßes gegen den Pariser Schuh.

Digitus, oder Finger	:	99, 41.
Palmus, oder Handbreit	:	397, 64.
Spitama, Spanne	:	1192, 93.
Pes, Schuh :	:	1590, 57.
Cubitus communis, oder gemeine Elle :	:	2385, 85.
Cubitus sacer, oder heilige Elle		2783, 49.

Vergleichung der alten jüdischen Münzen gegen unser Reichsgeld.

Minutum	:	$\frac{9}{32}$ eines Pfennigs.
Quadrans	:	$\frac{9}{16}$ eines Pfennigs.
Assarius :	:	$2\frac{1}{4}$ Pfennige.
Gerah :	:	2 Kreuzer, 1 Pfen.
Denarius, oder Drachma		11 Kreuzer, 1 Pfen.
Didrachma, oder Siclus profanus	:	22 Kreuzer, 2 Pfen.
Siclus sacer, oder Stater		45 Kreuzer. —
Minah, Mna, ein Pfund Silber :	:	25 Rchsthl.
Ein Pfund Gold	:	300 Rchsthl.
Ein Talent Silber	:	1500 Rchsthl.
Ein Talent Gold	:	18000 Rchsthl.

Nach

Nach diesen Tabellen können nach der Regel De-tri, wieviel eine gegebene Anzahl von Ellen, Pfunden u. s. w. eines Landes in einem andern Lande ausmachen, berechnet werden; und ist hiebey folgende Regel zu beobachten, als:

Man schreibe diejenige Zahl, welche in der Tabelle vor jenem Lande steht, dessen Ellen, Pfund u. s. w. man reduciren will, als das erste Glied der Proportion: diejenige Zahl, welche in der Tabelle bey jenem Lande steht, zu dessen Ellen, Pfunden, u. s. w. man die Reduction zu machen verlangt, setze man in die zweyte Stelle: die Anzahl der Ellen, Pfunde u. s. w., welche reducirt werden sollen, schreibe man in die dritte Stelle; so wird das vierte Glied die gesuchte Anzahl der Ellen, Pfunde, u. s. w. geben. Bey der Reduction der Ellen, Pfunde und Meilen bedient man sich der geraden Regel de Tri. Bey der Reduction der Schuhe aber der verkehrten Regel de Tri.

Erstes Exempel in Ellen.

Ein Kaufmann hat zu Amsterdam 200 Ellen Tuch gekauft. Wie viel machen diese Augsburger Ellen? Antwort: $240\frac{220}{347}$ Augsburger Ellen.

Man schlage in der Tabelle von Ellen Amsterdam nach, so steht nebenbey die Zahl $173\frac{1}{2}$, welche man in die erste Stelle setzen muß. In

der

der nämlichen Tabelle suche man die Zahl, so neben Augsburg steht; so findet man $208\frac{3}{4}$; diese setze man in die zweyte Stelle. Die Anzahl der Ellen, so reducirt werden sollen, nämlich 200, setze man an die dritte Stelle; so stehen die Glieder der Proportion also:

$173\frac{1}{2} : 208\frac{3}{4} = 200$: und das vierte Glied wird nach der geraden Regel de Tri gesucht.

Amsterd. Augsb. Amst. Ellen Augsb. Ellen.

$173\frac{1}{2}. : 208\frac{3}{4}. = 200. : 240\frac{220}{347}.$

Zweytes Exempel in Gewicht.

Ein Kaufmann zu London hat 320 ℔. Caffee gekauft; wie viel Pfund, schwer Gewicht, hat er zu Augsburg? Antwort $294\frac{46}{61}$ ℔. Augsburger Pfund, schwer Gewicht.

Drittes Exempel in Meilen.

Wie viel machen 150 Dänische Meilen deutsche Meilen? Antw. 125 deutsche Meilen.

Dänische. Deutsche. Dänische. Deutsche.

$24000 : 20000 = 150 : 125.$

Viertes Exempel in Schuhen.

Wie viel machen 112 Berliner Schuh in Augsburg? Antwort: $117\frac{155}{1313}$ Augsburger Schuh.

Die

Die Auflösung nach der verkehrten Regel de Tri ist demnach folgende:

Augsb. Berlin. Berlin. Augsb.

$$1313 : 1373 = 112 : 117\tfrac{155}{1313}.$$

```
  1313 : 1373 = 112 : 117 155/1313.
  ----
   117 :  112
         ----
         2746
        1373
       1373
      ---------
       153776
       1313..
       ------
        2247
        1313
       ------
         9346
         9191
       ------
          155
       ------
         1313
```

Fünftes Exempel in jüdischen Münzen.

Der heilige Marcus sagt am zwölften Kapitel, die arme Wittwe habe zwey Minuta geopfert, wieviel beträgt dieses in der Reichsmünze?

$1 : 2 :: \frac{9}{32} : \frac{18}{32}$ oder $\frac{9}{16}$ eines Pfennigs.

Bey Matthäus am 18 Kapitel heißt es, ein Knecht sey seinem Herrn 10000 Talente schuldig gewesen. Wieviel beträgt diese Schuld in der Reichsmünze, wenn es Talente im Silber:

Silber: wieviel, wenn es Talente im Golde gewesen?

1 : 10000 : : 1500 : 15000000 Rchsthl.
1 : 10000 : : 18000 : 180000000 Rchsthl.

Eilfter Abschnitt.

Von der zusammengesetzten Regel de Tri.

§. 92.

Im §. 87. ist angezeigt worden, daß die zusammengesetzte Regel de Tri in drey besondere Theile abgetheilt werden müsse; und daß die Regel von Fünfen oder die Quinque den ersten Theil ausmache. Bey Berechnung der Exempel nach dieser Regel von Fünfen ist zweyerley zu beobachten, nämlich

1) werden aus den gegebenen fünf Gliedern drey Glieder, die zusammengehören, in eine Proportion gebracht, und hiezu das vierte Glied berechnet. Alsdenn setzt man dieses gefundene vierte Glied mit den beyden übrigen gegebenen in eine andere Proportion, und sucht hiezu wieder das vierte Glied. Oder

2) multiplicire man von den fünf gegebenen Gliedern zwey Glieder von einerley Benennung mit zwey andern ebenfalls von einerley Benennung, doch so, daß beyde Factoren

sich

sich aufeinander als Ursachen und ihre Wirkungen beziehen: alsdenn setze man diese beyde Produkte mit den übrig gegebenen Gliedern in eine Proportion, suche hiezu das vierte Glied, so ist solches das Facit.

Hierauf gründet sich die allgemeine Regel, wie die Exempel nach der Regel de Quinque angesetzt werden müssen; nämlich

Man setze beyde Fragzahlen am Ende untereinander, dasjenige, was mit dem gesuchten von einerley Art ist, in die Mitte, und die beyden übrigen Zahlen vorne untereinander. Die beyden Fragzahlen sowohl, als die beyden ersten Zahlen in der ersten Stelle multiplicire man in einander, so bekömmt man drey Zahlen, mit welchen man nach der ordentlichen Regel de Tri verfahren kann.

Einige Exempel werden diese Regel besser erläutern, als alle weitläufige Erklärung.

1) Exempel der geraden oder direkten Regel von Fünfen.

1) Ein Fuhrmann empfängt für 12 Centner auf 10 Meilen 5 fl. Fracht oder Fuhrlohn: wieviel muß er bekommen, wenn er 50 Ct. 24 Meilen weit führen muß? Antwort 50 fl. —

Nach

Nach der ersten Art.

10 Meilen : 24 Meilen = fl. 5 : fl. 12.
12 Cent. : 50 Cent. = fl. 12 : fl. 50.

Durch die erste Proportion wurde gefunden: wieviel Gulden Fracht für 24 Meilen bezahlt werden müsse, wenn 10 Meilen 5 fl. kosten. In der andern Proportion aber wurde berechnet, wieviel für 50 Centr. Fuhrlohn bezahlt werden müßte, wenn für 12 Ct. 12 fl. Fracht bezahlt werden.

Nach der zweyten Art.

12 Centr. 50 Centr.
10 Meilen. 24 Meilen.

12 : 1200 = fl. 5 : fl. 50.
5
fl. 50. 600ø
60
.0

2) Ein Capital von 100 fl. trägt in einem Jahr 5 fl. Zins; wieviel machen 3000 fl. in 6 Jahren Zinse? Antw. 900 fl. —

fl. Cap. fl. Cap. fl. Int. fl. Int.
100 : 3000 = 5 : 150.
fl. 150øø

Jahr Jahr fl. fl.
1 : 6 = 150 : 900.
6
900

3) Eine Person verzehrt in 4 Wochen 22 fl. 36 kr. 3 hl. wie viel verzehren sechs Personen in einem Jahre? Antw. 1763 fl. ~~46 kr. 2 Pfennige.~~

4) 200 Soldaten kosten monatlich zu unterhalten 900 fl. — Wie viel braucht man, um 1 Jahr lang 12000 Mann zu unterhalten? Antw. 648000 fl.

5) Ein Stück Tapezerey, 8 Ellen lang, und 6 Ellen breit, wird mit 12 Gulden bezahlt. Wie hoch wird ein anderes dergleichen Stück kommen, das 20 Ellen lang, und 10 Ellen breit ist?

Der Werth des Tuches ist die Wirkung; denn dieser wird durch die Breite und Länge desselben verursachet. Diese Aufgabe wird demnach aufgelöset werden, wie folgt.

Länge		Breite		Gulden
8	:	6	:	12
20	:	10		

8×6 = 48 : : das erste Produkt
20×10×12 = 2400 das zweyte Produkt.

$$\frac{2400}{48} = 50$$ der verlangte Werth.

6) Da ein Gang in einer Mühle binnen 1 Tag 12 Schäff mahlen kann; wie viel wird eine Mühle, die aus 18 Gängen besteht, in einem Jahre, das ist, in 365 Tagen Mehl liefern?

Die

Die Wirkung ist die Anzahl der Schaffe, welche gemahlen werden. Die Auflösung wird also diese seyn:

Gang	Tag	Schaff
1 :	1 :	12
18 :	365	

$1 \times 1 = 1$ das erste Produkt

$12 \times 18 \times 365 = 78840$ das zweyte

$\frac{78840}{1} = 78840$ die verlangte Anzahl der Schaffe.

7) Sechs Wägen mit Wein beladen, 9 Meilen weit zu führen, kosten 72 Gulden. Wie groß wird also der Unkosten seyn, wenn 27 dergleichen Wägen 15 Meilen weit sollen geführet werden?

Der Fuhrlohn, 72 Gulden ist die Wirkung, die Auflösung geschieht hiemit also:

Wägen	Meilen	Gulden
6 :	9 :	72
27 :	15	

$6 \times 9 = 54$ das erste Produkt

$27 \times 15 \times 72 = 29160$ das zweyte

$\frac{29160}{54} = 540$ der gesuchte Fuhrlohn.

8) Wenn einem jeden Soldaten monatlich 4 Gulden gereichet werden, wie groß wird der Aufwand für 4000 Soldaten in 4 Jahren seyn?

Soldat	Monat	Gulden
1 :	1 :	4
4000	48	

$1 \times 1 = 1$ das erste Produkt
$4000 \times 48 \times 4 = 768000$ das zweyte Prod.

$\frac{768000}{1} = 768000$ der gesuchte Aufwand

9) 100 Soldaten verzehren in 3 Wochen 21 Centner Fleisch. Wie viele können mit 63 Centnern 5 Wochen lang erhalten werden?

Die Anzahl der Centner Fleisch, welche verzehret werden, ist die Wirkung. Die Auflösung wird demnach diese seyn:

Soldaten	Wochen	Centner
100 :	3 :	21
	5	63

$100 \times 363 = 18900$ das erste Produkt
$5 \times 21 = 105$ „ „ das zweyte Produkt.

$\frac{18900}{105} = 180$ die gesuchte Anzahl der Soldaten.

10 Schnitter schneiden in 5 Tagen 30 Jaucharte. Wenn nun 25 gedungen werden, wie bald werden sie mit 40 Jaucharten fertig seyn?

Die Anzahl der Jaucharten, die geschnitten werden, ist die Wirkung. Die Auflösung geht demnach also:

Schnit-

Schnitter	Tage	Jaucharte
10 :	5 :	30
25 :		40

$10 \times 5 \times 40 = 2000$ das erste Produkt
$25 \times 30 = 750$; das zweyte Prod.

$$\frac{2000}{7} = 2\tfrac{500}{750} = 2\tfrac{2}{3} \text{ Tage.}$$

11) Wenn ein gewisses Maaß Getreides um 96 Gulden gekauft wird, so müssen die Bäcker aus obrigkeitlichen Befehle ein 3 Pfunde schweres Brod um 12 Kreuzer geben. Wie schwer muß also ein Brod für 30 Kreuzer seyn, da eben selbes Maaß Getreides um 165 Gulden gekaufet wird?

Der Werth des Brodes ist die Wirkung. Die Auflösung wird hiemit diese seyn:

Gulden	Pfund	Kreuzer
96 :	3 :	12
165 :		30

$96 \times 3 \times 30 = 8640$ das erste Produkt
$165 \times 12 = 1980$ das zweyte Prod.

$$\frac{8640}{1980} = 4\tfrac{720}{1980} = 4\tfrac{4}{11}$$ die gesuchte Schwere.

12) Eine Stadt, in welcher 1000 Soldaten, ist mit 200 Fässern Mehl auf 6 Monate genugsam versehen: es werden ihr aber noch 80 dergleichen Fässer zugeschickt, zugleich aber der Befehl, soviel Besatzung noch dazu zu nehmen, daß sie auf 7 Monate versehen sey.

Die Wirkung ist die Anzahl der Mehl-Fässer, welches von den Soldaten verzehret wird.

Soldaten		Fässer		Monate
1000	:	200	:	6
		280	:	7

1000×6×280 = 1680000 das erste Prod.
200×7 = 400 = =

$$\frac{1680000}{1400} = 1200.$$ Die Anzahl der Soldaten, welche mit 280 Fässern auf 7 Monate können erhalten werden. Die Stadt muß also noch 200 Mann einnehmen.

13) Wenn eine Mauer, die 20 Schuhe lang, 11 Schuhe hoch, und $2\frac{1}{2}$ Schuh dick, 400 Reichsthaler zu stehen kömmt; was wird eine andere dergleichen kosten, welche 36 Schuhe lang, 15 hoch, und 5 dicke werden soll?

Die Wirkung ist der Werth der Mauer.

Länge	Höhe	Dicke	Reichthaler
20	11	2,5	400
36	15	3	

20×11×2,5 = 550 das erste Produkt
36×15×3×400 = 648000 das zweyte

$$\frac{648000}{550} = 1178\frac{10}{55} = 1178\frac{2}{11}$$ Rchsthl.

b) Exem-

b) Exempel der umgekehrten Regel von Fünfen.

1) In einem Tage können mit einem Pfluge 2 Jauchert Acker umgepflüget werden, wie viel braucht man Pflüge, um in 6 Tagen 144 Morgen umzuackern? Antw. 12 Pflüge.

Tag		Tage		Morgen		Morgen
1	:	6	=	2	:	12

Morgen		Morgen		Pflug		Pflüge
12	:	144	=	1	:	12

Oder

Morgen		Morgen		Pflug		Pflüge
2	:	144	=	1	:	72

Tage		Tag		Pflüge		Pflüge
6	:	1	=	72	:	12

2) Man brauche für 200 Soldaten monatlich 900 fl. —. Nun frägt es sich, wie lange 12000 Mann Soldaten für 648000 fl. — kr. unterhalten werden können? Antw. 12 Monate.

§. 91.

In der zusammengesetzten Regel de Tri ist nach §. 87. die Kettenregel, die Regel Multiplex, oder Conjointe die zweyte Unterabtheilung, und ist hiebey zu beobachten, daß die Exempel der Kettenregel auf die nämliche Art, wie in der Regel von Fünfen berechnet werden, blos mit dem einzigen Unterschied, daß

darinn mehr als zwey Proportionen gemacht, oder welches einerley ist, daß mehrere Paar Glieder derselben in einander multiplicirt werden müssen.

Die Regel, wornach die zur Kettenregel gehörige Exempel angesetzt werden müssen, ist folgende:

Oben an schreibe man zur rechten Hand die Fragzahl; linker Hand aber setze man von den gegebenen Zahlen diejenige, welche mit der Fragzahl von einerley Art ist; unter die Fragzahl rechter Hand diejenige Zahl, welche damit zu vergleichen ist: desgleichen zur linken Hand diejenige Zahl, so mit der nächst vorhergehenden Zahl zur rechten von einerley Art ist, und zur rechten Hand wiederum die dritte in der Aufgabe verbunden. Man fahre damit so lange fort, bis endlich zur rechten Hand eine Zahl kömmt, die mit der gesuchten von einerley Art ist.

a) Exempel der geraden Kettenregel.

1) Man umpflügt mit 2 Pflügen 9 Morgen Ackers in 3 Tagen, wenn des Tags 8 Stunden gepflüget werden; wie viel Land kann man mit 10 Pflügen in 6 Tagen umackern, wenn täglich 12 Stunden gepflügt wird? Antwort 135 Morgen.

Nach

Nach der ersten Art.

2 Pflüge : 10 Pflüge = 9 Morgen : 45 Morg.
3 Tage : 6 Tage = 45 Morgen : 90 Morg.
8 Stund : 12 Stund = 90 Morgen : 135 Morg.

Nach der andern Art.

2 Pflüge	10 Pflüge
3 Tage	6 Tage
8 Stund	12 Stunden
48 :	720 = 9 Morgen : 135 Morgen.

2) Hamburg sendet nach Leipzig 1000 Louisdor, welche in Leipzig 5 Rchsthl. gelten. Leipzig sendet die Valuta zurück à 135 p. C. im Hamburger Bo. Man fragt, wie viel man Hamburger für diese 1000 Louisdor in Mark Bo. bekomme? Antw. $11111\frac{1}{9}$ Mark Bo.

1 Louisdor.	1000 Louisdor.
135 Thlr. in Leipz.	5 Thlr. in Leipz.
27	
9. 1. Thlr. Bo.	100 Thlr. Bo.
	3 Mark Bo.

Divid. mit 9 | 100000
11111

$11111\frac{1}{9}$ Mark Bo.

3) Ein Capital von 560 rth. à 5 pr. C. beträgt in 2 Jahren 56 rth. Interesse; wie viel trägt ein Capital von 2520 rth. à 6 p. C. in 56 Jahren Interessen? Antw. 756 rth.

560 Rchsthl.	2520 Rchsthl.
5 p. C.	5 p. C.
2 Jahr	5 Jahr

5600 : 75600 = 56 : 756 Rchsthl.

4) 7 Mk. 2 ß. courr. und die lagio von Bo. gegen courr. $18\frac{3}{4}$ p. C. wie viel Thlr. Bo. erhält man für 723 Ducaten? Antwort: 1446 Thlr. Bo.

Anmerkung.

Wenn Brüche, wie in diesem Exempel vorkommen, so schafft man dieselbe weg, und setzt:

1 Duc. giebt $7\frac{1}{8}$ Mk. courr.
folglich 8 Duc. geben 57 Mk. courr.

Weiter: 100 Mk. Bo. geben $118\frac{3}{4}$ Mk. courr. folglich 400 Mk. Bo. geben 475 Mk. courr.

Folglich kömmt die Berechnung zu stehen, wie folgt:

1	1̸0̸
8̸ Duc.	5̸7̸ Mk. courr.
9̸5̸. 1̸0̸	5̸0̸
4̸7̸5̸ Mk. courr.	4̸0̸0̸ Mk. Bo.
	2
2̸ Mk. Bo.	1 Thlr. Bo.
1	
	723 Duc.
	2
	1446 Thlr. Bo.

b) Exem-

b) Exempel der umgekehrten Kettenregel.

1) Man kann mit 2 Pflügen in 3 Tagen 9 Morgen Acker umpflügen, wenn täglich 8 Stunden geackert wird. Wie viel Pflüge werden gebraucht, wenn man 135 Morgen Aecker in 6 Tagen und des Tags 12 Stunden umackern soll? Antwort 5 Pflüge.

1	15
~~9~~ Morgen	~~135~~ Morgen
2	
~~6~~ Tage	~~3~~ Tage
3	1
~~12~~ Stunden	~~8~~ Stunden.
6 : 30 =	5 Pflüge.

§. 92.

Die nach §. 87. bestimmte dritte Abtheilung der zusammengesetzten Regel De-tri ist die Gesellschafts-Rechnung, worinn Gewinn und Verlust unter mehreren nach dem Verhältniß dessen, was sie zusammengeschossen haben, getheilt wird.

§. 93.

Bey der eigentlichen Gesellschafts-Rechnung überhaupt sind folgende drey Punkte wohl in Acht zu nehmen, als:

1) daß

1) daß man die zusammengelegten Gelder oder andere Sachen in eine Summe bringe;

2) diese Summe mit dem Eingelegten eines jeden von der Gesellschaft und dem Gewinn, oder Verluste in so viele Proportionen bringe, als Personen zu der Gesellschaft gehören; und endlich

3) das vierte Glied in einer jeden dieser Proportion suche.

§. 94.

Bey der Gesellschafts-Rechnung insbesondere ist zu beobachten:

a) die einfache Gesellschafts-Rechnung, worinn bey den Eingelegten keine verschiedene Zeiten bestimmt werden; und

b) die doppelte Gesellschafts-Rechnung, wenn bey den Eingelegten verschiedene Zeiten angegeben werden, welche Zeiten man vorher mit dem Eingelegten, als worauf sie sich beziehen, multipliciren muß.

Exempel der einfachen Gesellschafts-Rechnung.

1) Drey Kaufleute, ihre Namen sollen A, B und C seyn, schießen ein Capital von 1600 fl. zusammen. A giebt 300 fl. — B giebt 500 fl. — und C giebt 800 fl. dazu her. Sie gewinnen mit diesem Gelde 160 fl. — Wie groß ist eines jeden Gewinn?

Man

Man addire das zusammengeschossene Geld, so ist die Summe 1600 fl. — Nun suche man nach der Regel De=tri, indem man die Summe für das erste Glied; die Summe der Einlage eines jeden für das zweyte Glied; den ganzen Gewinn für das dritte Glied annimmt, so giebt das vierte den Gewinn eines jeden Glied an. Hieraus entspringen folgende drey Proportionen: als

1600 : 300 = 160 : 30 Gewinn des A.
1600 : 500 = 160 : 50 Gewinn des B.
1600 : 800 = 160 : 80 Gewinn des C.

2) Es treten drey Personen in eine Compagnie, der erste A giebt 7200 rth. der andere B giebt 5600 rth. und der dritte C giebt 6400 rth. Mit diesem Gelde gewinnen sie 5700 rth. wie viel bekömmt ein jeder von dem Gewinn? Antwort: A erhält 2160 rth. B 1680 rth. und C 1920 rth.

3) Vier Metzger vermiethen eine Wiese um 120 fl. —, und weiden auf derselben ihre Schafe. Einer davon hat 72 Stück; der andere 64 Stück; der dritte 48 Stück, und der vierte 30 Stück. Wieviel hat jeder an dem Zins zu bezahlen? Antwort: Der erste 40 fl. 22 kr. $3\frac{47}{107}$ hl. der andere 35 fl. 53 kr. $2\frac{18}{107}$ hl. der dritte 26 fl. 54. kr. $7\frac{67}{107}$ hl. und der vierte 16 fl. 49 kr. $2\frac{32}{107}$ hl.

Exempel der gedoppelten Gesellschafts-Rechnung.

1) Drey

1) Drey Kaufleute legen eine gewiße Summe zusammen. Der erste A giebt 800 fl. — kr. auf vier Monate, der andere B giebt 600 fl. auf sechs Monate, und der dritte C 200 fl. auf drey Monate. Ihr Gewinn beträgt 150 fl. wie viel beträgt eines jeden Gewinn?

$$800 \times 4 = 3200$$
$$600 \times 6 = 3600$$
$$200 \times 3 = 600$$

Summe 4700

$7400 : 3200 = 160 : 64\frac{32}{37}$ Gewinn des A.
$7400 : 3600 = 150 : 72\frac{36}{37}$ Gewinn des B.
$7400 : 600 = 150 : 12\frac{6}{37}$ Gewinn des C.

So wie der Gewinn, eben so wird auch der Verlust gerechnet:

2) Vier Kaufleute nämlich A, B, C, und D befanden sich auf einem Schiffe, als plötzlich sich ein Sturm erhob, und der erste Kaufmann A genöthiget wurde, seine Güter, die auf 1000 rth. geschätzt wurden, zur Erleichterung des Schiffes in das Meer zu werfen. Des zweyten B durch die Erleichterung des Schiffes erhaltene Güter belaufen sich auf 4000 rth. des dritten C auf 6400 rth. und des vierten D auf 5600 rth. Der Eigenthümer des Schiffes E giebt seinen Werth auf 3000 rth. an. Wie viel muß ein jeder von den letzten Vieren dem ersten A geben, und wie viel muß dieser selbst einbüßen.

Man

Man addire alle Einlagen in eine Summe: so giebt solche 20000 rth. Der allgemeine Verlust belauft sich auf 1000 rth. Nun sage man, wie die Summe aller Einlagen, zu der Einlage eines jeden, so verhält sich der allgemeine Verlust zu dem sonderheitlichen Verlust eines jeden.

Man bekömmt alsdenn folgende fünf Proportionen:

20000 : 1000 = 1000 : 60 Verlust des erst. A.
20000 : 4000 = 1000 : 200 Verl. des zweyt. B.
20000 : 6400 = 1000 : 320 Verl. des dritt. C.
20000 : 5600 = 1000 : 280 Verl. des viert. D.
20000 : 3000 = 1000 : 150 Verl. des fünft. E.
des Schiffherrn.

§. 95.

Nachdem die Berechnungsarten der Gesellschafts-Regel sowohl überhaupt als insbesondere in den beyden vorhergehenden Paragraphen gelehrt worden, so ist auch itzt noch zu zeigen übrig, wie die erste Unterabtheilung der Gesellschafts-Rechuung nämlich die Vermischungs-Rechnung berechnet werden müsse, und ist hiebey weiter nichts zu beobachten, weil die Exempel auf die vorhin beschriebene Art gerechnet werden, als daß man die Gewichte oder Werthe der einzelnen Materien, die zu vermischen sind, als etwas Eingelegtes, und eine gegebene Menge oder Größe des Vermischten als ein Gewinn oder Verlust betrachte.

Zinn

Zum Exempel.

1) Zum Schießpulver wird auf 1 ℔. Salpeter 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schweffel erfordert; wieviel muß man von jeder dieser einzeln Materie nehmen, wenn man 50 ℔. Pulver machen will.

Salpeter	32	Loth
Kohlen	6	
Schwefel	4	
Summe	42	

$42 : 32 = 50 : 38\frac{2}{21}$ ℔. Salpeter.
$42 : 6 = 50 : 7\frac{3}{21}$ ℔. Kohlen.
$42 : 4 = 50 : 4\frac{16}{21}$ ℔. Schwefel.

Die Goldschmiede und Silberarbeiter nennen den Tiegel beschicken, wenn man ein gewißes Gewicht Gold und Silber von verlangtem Gehalte zuwege bringen soll, und die Frage ist, wieviel von jeder Art des Silbers oder Goldes auch andern Metalles dazu erfordert werde.

2) Ein Goldschmied hat $37\frac{1}{2}$ Mk. $14\frac{1}{2}$ löthiges Silber, und will dasselbe mit einem 9 löthigen Silber beschicken, damit es $12\frac{1}{2}$ löthig werde. Wieviel muß er zu jenen $37\frac{1}{2}$ Mk. von diesem andern Silber zusetzen?

$12\frac{1}{2}$	$14\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	7
	9	2	4

$7 : 4 = 37\frac{1}{2}$ Mk. : $\frac{4 \times 37\frac{1}{2}\text{ Mk.}}{7}$

Dieß giebt den Zusatz $21\frac{3}{7}$ Mk.

Probe.

$37\frac{1}{2}$ Mk.	à $14\frac{1}{2}$ L. fein	thut	$543\frac{3}{4}$ L.
$21\frac{3}{7}$ Mk.	à 9 L. fein	thut	$192\frac{6}{7}$ L.
$58\frac{13}{14}$			$736\frac{17}{28}$

Folglich kommt $\frac{736\frac{17}{28}}{58\frac{13}{14}} = 12\frac{1}{2}$ Mk. für 1 Mk. des Gemischten.

Hieraus folgt die gemeine Regel:

Man schreibe den bessern und schlechtern Preis unter einander, und den verlangten mittlern Preis zur Linken. Zur Rechten setze man bey dem bessern Preis den Unterschied des schlechtern vom mittlern, und beym schlechtern Preis den Unterschied des bessern vom mittlern: so zeigen diese Differenzen das Verhältniß der Theile, so man sucht, an.

§. 96.

Die Verbindungs-Regel ist diejenige Vermischungs-Rechnung, in welcher man verschiedene Weine, Getränke u. d. gl. untereinander zu mischen lehrt. Es giebt zwo Gattungen dieser Regel; die eine heißt die mittlere, die andere hingegen die wechselnde.

§. 97.

In der mittlern Verbindungs-Regel sucht man den Werth einer gewissen Maaße der gan-

zen Mischung aus den besondern Maaßen und Werthen der Sachen, welche vermischt worden sind: und die Rechnung wird auf folgende Art verrichtet:

Man addire alles, was untereinander soll vermischt werden, in eine Summe, wie auch alle besondere Werthe in eine andere Summe. Alsdenn sage man: wie sich verhält die erste Summe zu der andern Summe, so verhält sich eine gewisse Maaße der Vermischung zu ihrem Werth.

§. 98.

Die wechselde Verbindungs-Regel hat drey verschiedene Fälle: als

Erster Fall. Man giebt den Werth einer gewissen Maaße einer jeden Sache an, die in die Mischung kommen soll: man giebt auch den Werth der nämlichen Maaße der Mischung. Man sucht daraus, wieviel von einer jeden Sache in die Mischung kommen müsse.

Zweyter Fall. Wenn die Werthe aller Sachen, welche untereinander gemischt werden sollen, der Werth der ganzen Mischung und überdas die Maaße einer Sache, die in die Mischung kömmt, gegeben sind, zu finden, wieviel von allen übrigen Sachen in die Mischung kommen muß.

Dritter Fall. Wenn der Werth der Mischung, die Werthe der zu vermischenden Dinge,

und noch dazu die Maaße der ganzen Mischung gegeben sind, die Maaße finden für jede Sache, die in die Mischung kommen soll.

Exempel von der mittleren Verbindungs-Regel.

Es sollen 15 Schaff Waizen mit 12 Schaff Roggen vermischt werden. Das Schaff Waizen 7 fl. — Das Schaff Roggen 5 fl. — Wieviel wird ein Schaff des vermischten Getraides werth seyn?

Man addire 15 zu 12, so ist die Summe 27. Multiplicire man 15 mit 7, so ist das Produkt 105, der Werth des Waizens, der in die Mischung kömmt. Man multiplicire 12 mit 5, so ist 60 das Produkt des Werths des Roggens, der in die Mischung kömmt. Addirt man beyde Produkte, so ist die Summe 165 der Werth aller Sachen, welche vermenget werden. Nun sage man: $27 : 165 = 1 : 6\frac{1}{9}$. Dieses ist der Werth eines gemischten Schaffes.

Exempel von der wechselnden Verbindungs-Regel auf den ersten Fall.

Ein Weinwirth hat viererley Weine, welche er untereinander mischen will. Die Maß des erstern kostet 20 kr. die Maß des zweyten 18 Kreuzer, die Maß des dritten 10 kr. und die Maß des vierten 11 kr. Wieviel muß er von

jedem Wein nehmen, daß eine gemischte Maß 15 kr. ist.

Man vergleiche erstens den um 20 kr. und den um 11 kr. mit dem mittlern um 15 kr. der Mischung; wie folgt:

15	20	15 — 11 = 4
	11	20 — 15 = 5

Zweytens vergleiche man den um 18 kr. und den um 10 kr. mit dem mittlern Werth 15 kr. der Mischung;

15	18	15 — 10 = 5
	10	18 — 15 = 3

woraus folgt: daß von dem Wein zu 20 kr. 4 Maß; von dem um 11 kr. 5 Maß; von dem um 18 kr. 5 Maß; und endlich von dem um 10 kr. 3 Maß genommen werden müssen, um eine Maß der Mischung, so 15 kr. werth seyn soll, zu bekommen.

Exempel für den zweyten Fall.

Wie viel Weine, dessen eine Maß 60 kr. gilt, muß unter 12 Maß eines andern Weines geschüttet werden, dessen eine Maß 42 kr. kostet, damit eine Maß der Mischung 52 kr. werth sey?

Nach der vorhergehenden Auflösung würde das Exempel stehen:

der

Der mittlerer Werth 52 | 60 | 52 — 42 = 10
| 42 | 60 — 52 = 8

Nun sage man: wie sich die Maß, welche man durch die genommene Differenzen für jene Sachen genommen hat, deren Maß schon vorher gegeben war, verhält zu eben dieser gegebenen Maß; so verhält sich die Maß, welche man für die andere Differenzen gefunden hat, zu dem wahren Maß eben dieser Sache; die Proportion muß also stehen:

8 : 12 = 10 ; 15 dem verlangten Maß des bessern Weines.

Exempel auf den dritten Fall.

Man soll einen Wein, davon eine Maß 60 kr. gilt, mit einem andern Wein, dessen eine Maß 42 kr. kostet, so vermischen, daß die ganze Mischung 27 Maß ausmacht, und eine Maß dieser Mischung 52 kr. Werth sey. Wie viel muß man von einem jeden nehmen?

Der mittlere Werth der Mischung	52	60	52 — 42 = 10
		42	60 — 52 = 8
			die Summe = 18

Nun sage man 18 : 27 = 10 : 15
und 18 : 27 = 8 : 12

Von dem bessern müssen also 15 Maß, vom schlechtern hingegen 12 Maß genommen wer-

werden: so ist die ganze Mischung 27 Maß, und eine Maß ist 52 kr. werth.

§. 99.

Die Falsi-Rechnung, welche nach §. 88. die zweyte Unterabtheilung der Gesellschafts-Rechnung ist, wird auf eben diese Weise, wie die eigentliche Gesellschafts-Rechnung gerechnet, wenn nur statt der unbekannten Größe des Eingelegten, Zahlen gesetzt werden, welche gegeneinander die gegebenen Verhältnisse haben.

Zum Exempel.

Es soll ein Gewinn von 200 fl. — unter drey Kaufleute getheilt werden; davon der eine zu der Summe, daraus dieser Gewinn entstanden, soviel als die beyden andern zusammen: der andere aber noch einmal soviel als der dritte gegeben, wie viel bekömmt ein jeder?

Man nehme zuerst drey willkührliche Zahlen an, welche die gegebenen Verhältnisse des Eingelegten gegeneinander haben, davon nämlich die erste so groß ist, als die beyden andern zusammen genommen, und die andere noch einmal so groß als die dritte, z. Ex. 3, 2, 1, oder 6, 4, 2, oder 30, 20, 10. Diese Zahlen zeigen die Verhältniße an, nach welchen der Gewinn getheilt werden muß. Denn die erste ist so groß, als die beyden andern zusammen; die andern aber noch einmal so

groß,

groß, als die dritte. Daher kann man dieselbe eben so gut, als ob man wüßte, wie viel ein jeder wirklich eingelegt hat, brauchen, um die gehörige Theile des Gewinnes nach obigen Regeln zu finden. Die Rechnung ist also:

Angenommene Einlage des ersten	=	3
des zweyten	=	2
des dritten	=	1
Summe	=	6

6 : 3 = fl. 200 : fl. 100 Gewinn des ersten
6 : 2 = fl. 200 : fl. $66\frac{2}{3}$: : : des zweyten
6 : 1 = fl. 200 : fl. $33\frac{1}{3}$: : : des dritten.

2) Einer hat ein Stück Tuch; davon verkauft er $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{8}$ behält noch 2 Ellen übrig, ist die Frage, wie viel hat das ganze Stück gehalten? Antw. 48 Ellen.

3) Es fragt einer den andern, wie weit Augsburg von Venedig liege; der giebt zur Antwort: wenn es noch so weit, halb so weit, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$ so weit wäre, und 5 Meilen dazu, so wären es gerade 212 Meilen; frägt sich demnach, wie weit beyde Städte von einander liegen? Antw. 72 Meilen.

Zwölfter Abschnitt.

Von den Quadratzahlen und von Ausziehung der Quadratwurzel.

§. 100.

Das herauskommende Produkt, wenn man eine Zahl in sich selbst multiplicirt, nennt man eine Quadratzahl; die Zahl aber, welche in oder mit sich selbst multiplicirt worden ist, heißt die Quadratwurzel.

§. 101.

Der Grund dieser Benennung ist aus der Geometrie genommen, wo man den Inhalt eines Quadrat findet, wenn man die Seite desselben mit sich selbst multiplicirt.

§. 102.

Die Quadratzahlen der natürlichen Zahlen lassen sich aus folgendem Wurzeltäfelein leicht einsehen, als

Wurzel.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadratzahl.	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Hieraus folgt, das die Quadratzahl einer einfachen Zahl aus mehr nicht als zweyen Ziffern bestehen könne, weil die Quadratzahl von 10 als der kleinsten doppelten Zahl schon

aus

aus drey Ziffern besteht; weil nämlich das Quadrat von 10 schon 100 ausmacht; aus gleichem Grunde kann die Quadratzahl von zwey Zahlen nicht mehr denn vier Ziffern in sich enthalten, weil 100 schon 10000 in Quadrat hat, u. s. w.

§. 103.

Die Quadratwurzel aus einer gegebenen Quadratzahl ausziehen, heißt nichts anders, als diejenige Zahl finden, die durch sich selbst multiplicirt die gegebene Quadratzahl ausmacht.

Zum Exempel.

Es soll aus der Quadratzahl 16 die Quadratwurzel ausgezogen werden, das heißt, man soll diejenige Zahl finden, die in sich selbst multiplicirt genau 16 hervorbringe.

§. 104.

Die Quadratzahl, deren Wurzel aus zwey Theilen besteht, enthält in sich,

1) das Quadrat des ersten Theils,
2) das Quadrat des zweyten Theils, und
3) das doppelte Produkt aus dem ersten Theile in den zweyten Theil.

Zum Exempel.

Es sey die Wurzel 25 oder 20 + 5. Multiplicirt man nun jeden Theil durch beyde,

so erhält man in dem Produkt das Quadrat des ersten Theils, und das doppelte Produkt des ersten im zweyten, und endlich das Quadrat des zweyten Theils.

$$
\begin{array}{r}
20 + 5 \\
20 + 5 \\
\hline
400 + 100 \qquad\quad \\
+ 100 + 25 \\
\hline
400 + 200 + 25 = 625,
\end{array}
$$

welches die Quadratzahl von 25 ist.

Eben dieser Satz läßt sich auch anwenden, wenn man eine einfache Zahl in zwey andere zerfällt.

Zum Exempel.

Es sey die Zahl 5 gegeben. Man theile dieselbe in zween Theile, etwa in 3 und 2, Das Quadrat von 3, nämlich 9 hält in sich das Quadrat des ersten Theils, und von 2 ist das Quadrat des zweyten Theils, nämlich 4, und das doppelte Produkt aus 3×2, nämlich 12: denn $9 + 4 + 12 = 25$.

§. 105.

Besteht die Wurzel aus mehr als zwey Zahlen, so kann man die ersten zwey oder mehrere derselben als eine ansehen, und es wird alsbald klar, daß jedes Quadrat die Quadrate aller Theile der Wurzel, und die Produkte aus jedem Theile zweymal genommen in alle die

übrigen,

übrigen, so vor ihm gegen die linke Hand stehen, in sich enthalten.

§. 106.

Aus einer gegebenen Quadratzahl die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung.

Man theile 1) die gegebene Quadratzahl von der rechten Hand gegen die linke Hand in Klassen, und gebe jeder Klasse zwey Ziffern; denn soviel Theile hat die Wurzel, als Klassen herauskommen. In der letzten Klasse gegen die linke Hand kann auch eine Ziffer stehen.

2) Das größte Quadrat, so in der ersten Klasse enthalten ist, ziehe man von der ersten Klasse ab; die Wurzel aber schreibe man zur Seiten, als den ersten Theil der verlangten Quadratwurzel, hinter die Quadratzahl.

3) Zu dem Reste, so nach der Subtraction geblieben ist, setze man die nächstfolgende Klasse. Den ersten schon gefundenen Theil der Quadratwurzel multiplicire man mit 2. Hierauf dividire man den gebliebenen Rest sammt der angehängten zweyten Klasse, doch so, daß man die letzte Ziffer derselben niemal zum Dividendus rechne. Den Quotienten schreibe man zur Seite als den zweyten Theil der gesuchten Wurzel, wie auch zur rechten Hand neben den Divisor.

4) Mul:

4) Multiplicire man den Divisor nebst dem angehängten zweyten Theile der Wurzel durch eben diesen zweyten Theil, und das Produkt ziehe man von der zweyten Klasse ab. Bleibt

5) ein Rest, so setze man zu demselben die dritte Klasse, und wiederhole man alles vorgesagte; und dieses so lange, bis keine Klasse mehr herabzusetzen übrig ist.

Zum Exempel.

Man soll die Quadratwurzel von 1764 finden.

Man theile diese Zahl in zwo Klassen ab, indem man nach den zweyen Zahlen 64 einen Strich macht. Man suche hierauf in dem Wurzeltäfelein das Quadrat, welches der ersten Klasse 17 entweder gleich ist, oder doch am nächsten kömmt; so wird man 16 finden. Diese Quadratzahl schreibe man unter die erste Klasse. Die darüber stehende Wurzel 4 schreibe man hinter einen aufrecht gezogenen Strich, als den ersten Theil der Wurzel. Unter 16 ziehe man einen Querstrich; subtrahire 16 von 17, und setze den Rest 1 unter den gezogenen Querstrich. Neben diesen Rest setze man die folgende Klasse, so hat man 164. Hierauf multiplicire man den ersten Theil der Wurzel mit 2, und das Produkt 8 schreibe man unter die Ziffer 6. Alsdenn

dividire man 16 durch 8; den Quotienten 2 schreibe man neben den vorerst gefundenen ersten Theil der Wurzel, wie auch neben 8, hieraus entsteht 82. Dieses multiplicire man durch den andern Theil, nämlich durch 2, so giebt das Produkt 164. Zieht man dieses von 164 ab, so bleibt nichts übrig; folglich ist 42 die Quadratwurzel der gegebenen Zahl 1764, und die ganze Rechnung steht, wie folgt:

17	64.	$\sqrt{42}$
16		
1	64	
	82	
1	64	
.	0.	

Ein anderes Exempel.

Man soll die Quadratwurzel aus der Zahl 20449 ausziehen. Nach gemachter Eintheilung steht die gegebene Zahl also: 2 | 04 | 49 | $\sqrt{}$. Die erste Classe 2 findet man nicht unter den Quadratzahlen. Das nächste kleinere Quadrat ist 1; man schreibe also dieses unter die erste Klasse 2. Die Wurzel davon, welche ebenfalls 1 ist, schreibe man hinter den ersten Theil der Wurzel, wie man unten sieht. Ziehe man 1 von 2 ab: neben den Rest 1 setze man die nächste Classe: hieraus entsteht 104. Den gefundenen ersten Theil der Wurzel mul-

tipli-

tiplicire man mit 2: das Produkt 2 schreibe man unter die 0. Dividire man 10 durch 2. Nun ist 2 in 10 zwar 5mal enthalten: wenn man aber diesen Quotient als den zweyten Theil der Wurzel annimmt, und neben den Divisor 3 schreibt, so entsteht 25, und so man dieses durch diesen zweyten Theil der Wurzel 5 multiplicirt, so erhält man das Produkt 125, welches größer ist, als daß man es von der zweyten Classe abziehen könnte. Man erkennt also, daß 5 zu groß ist, und daß man nur 4 als den andern Theil der Wurzel annehmen müsse: schreibe man also 4 neben den zuvor gefundenen ersten Theil der Wurzel, wie auch neben den Divisor 2. Man bekommt also 24. Dieses multiplicire man durch 4: das Produkt 96 ziehe man von 104 ab: zu dem Rest 8 setze man die noch übrige dritte Classe. Hieraus entsteht 849. Multiplicire man beyde bisher gefundene Zahlen der Wurzel, nämlich 14 durch 2. Das Produkt 28 schreibe man unter 849 so, daß die letzte Ziffer 9 leer bleibe. Dividire man 84 durch 28, und sage: 2 in 8 ist 4mal enthalten. Aber wenn man dieses als den dritten Theil der Wurzel nimmt, und auf die vorgeschriebene Art verfährt, so bekommt man ein Produkt, das man nicht abziehen kann. Man erkennt also, 4 sey zu groß, und schreibe 3 als den dritten Theil der Wurzel neben die zwo vorigen Wurzelzahlen, wie auch neben den Divisor 28. Hieraus entsteht 283: wenn man dieses mit 3 multi-

tipli-

pliciret, und das Produkt 849 abzieht, bleibt nichts übrig. Alſo iſt 143 die geſuchte Wurzel. Hier ſieht man die ganze Bearbeitung.

```
                  2
 2 | 04 | 49 √143
 1 |    |
 ------------
 1 | 04 |
 ------------
      8 | 49
      2̸ | 83̸
      8 | 49
    ----------
      · | ··
```

§. 107.

Die Urſache dieſer Regel muß aus dem, was oben iſt geſagt worden, hergeleitet werden. Ich will es in dem erſten obenſtehenden Exempel, ſo viel es ſeyn kann, erklären. In der erſten Claſſe 17 iſt das Quadrat des erſten Theils der Wurzel enthalten, und noch etwas weniges darüber: die Wurzel des größten Quadrats, welcher von dieſer erſten Claſſe abgezogen werden kann, iſt alſo der erſte Theil der verlangten Wurzel. Und, wenn man das Quadrat ſelbſt von der erſten Claſſe abzieht, ſo muß in dem Reſte ſammt der dazu geſetzten zweyten Claſſe das Produkt aus dem doppelten erſten Theile durch den zweyten, und überdas das Quadrat des zweyten Theils verborgen liegen. Nun befindet ſich das Quadrat

des

des zweyten Theils in der letzten Ziffer. Das doppelte Produkt ist also in den zweyen ersten. Man muß folglich diese zwey ersten Ziffern durch den doppelten ersten Theil dividiren, und alsdenn giebt der Quotient den zweyten Theil. Denn, wemn ein Produkt, das aus zwoen durch einander multiplicirten Zahlen entstanden ist, durch eine derselben dividirt wird, so muß der Quotient allezeit die andere geben.

Anmerkung.

Wenn es sich zuträgt, daß ein Rest sammt der angehängten neuen Classe das doppelte der zuvor gefundenen Wurzel niemal in sich begreift, ohne die letzte Ziffer dieser neuen Classe dazu zu nehmen, so muß gleich eine 0 in die Wurzel geschrieben, und auch die nächstfolgende Classe herabgesetzt werden. Man sehe hier ein Exempel:

4	12	09	$\sqrt{203}$
4			
·	12	09	
	·4	03	
	12	09	
	· ·	· ·	

Hier

Hier sind noch einige Exempel zur Uebung.

18	19	02	25	√4265
16				
2	19			
	~~82~~			
1	64			
55	02			
8	~~46~~			
50	76			
426	25			
85	25			
426	25			
0				

38	39	76	√62
36			
2	93		
~~1~~	~~22~~		
2	44		
	49	76	
	~~12~~	~~44~~	
	49	76	
	0		

1	01	20	36	√1006
1				
0	01	20	36	
		~~20~~	~~06~~	
	1	20	36	
		0		

§. 108.

Wenn, nachdem man die letzte Klasse schon herabgesetzt hat, nach der Subtraction ein Rest überbleibt, so hat die gegebene Zahl keine genaue Quadratwurzel: jedoch kann man derselben so nahe kommen, als immer beliebig ist; indem man allezeit zum Reste zwo Nullen setzt, und neue Ziffern für die Wurzel zu suchen

fortfährt, welche alsdenn Decimalzahlen sind, und also von den Ganzen durch ein Strichlein müssen abgesondert werden.

Zum Exempel.

38	94	89 √624,0905				
36						
2	94					
1	22					
2	44					
·	50	89				
	12	44				
	49	76				
	1	13	00	00		
	1	12	48	00		
	1	12	32	81		
	·	· ·	67	19	00	00
			12	48	18	05
			62	40	90	25
			4	78	09	75 Rest.

§. 100.

Die Probe, ob richtig gerechnet worden, anzustellen, muß man die gefundene Wurzel durch sich selbst multipliciren. Zu dem Productio addire man den Rest, wenn am Ende der Rechnung einer geblieben ist. Kommt die

vor:

vorgegebene Quadratzahl heraus, so ist die Rechnung richtig.

§. 110.

Bey Ausziehung der Quadratwurzel aus einem vorgegebenen Bruch ist weiter nichts zu erinnern, als daß sowohl aus dem Nenner als Zähler die Quadratwurzel ausgezogen werden muß.

§. 111.

Es sind zwey Zirkel gegeben. Der Durchmesser des einen hat 5 Zolle; der Durchmesser des andern hingegen 10 Zolle. Die Quadratfläche des erstern hält 19, 635 Quadratzolle: wie groß wird die Quadratfläche des andern Zirkels seyn?

Auflösung.

Es ist aus der Geometrie bekannt, daß die Zirkelflächen sich gegeneinander verhalten, wie die Quadrate ihrer Durchmesser: daher stelle man die Proportion folgendermaßen an: wie sich das Quadrat 25 von 5 zu dem Quadrat 100 von 0 verhält, so verhält sich die Fläche des ersten Zirkels zur Fläche des andern Zirkels.

25 : 100 = 19,635 : 78,54 Quadratzolle.

§. 112.

Die Magdeburgischen Halbkugeln, deren Durchmesser 1 Schuh oder 12 Zoll groß ist, halten, nachdem die Luft rein ist herausgezogen worden, mit einer Gewalt von 1715 Pfunden zusammen: wie stark werden zwo andere Halbkugeln zusammenhalten, deren Halbmesser 8 Zolle hat?

Die Kraft, mit welcher dergleichen Kugeln zusammenhalten, verhält sich, wie ihre Zirkelflächen; und diese verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Durchmesser. Man stelle also diese Proportion an. Wie sich das Quadrat von 12, das ist 144, verhält zum Quadrat von 8, das ist, zu 64, so verhalten sich 1715 Pfunde zur Gewalt, mit welcher die Halbkugeln von 8 Zollen im Durchmesser zusammenhalten.

144 : 64 = 1715 : 762 Pfunde beynahe.

Wenn also zwo dergleichen Magdeburgische Halbkugeln vorgewiesen werden, so kann man also gleich durch die Rechnung bestimmen, wie groß die Kraft seyn werde, mit der sie nach herausgezogener Luft zusammenhalten. Man darf nämlich nur erforschen, wie groß ihr Durchmesser ist. Ist dieser bekannt, so kann man aus der schon vorhin bekannten Kraft, mit welcher die Halbkugeln von einem Schuh im Durchmesser zusammenhangen, die Kraft, mit der die vorgelegten

zusam=

zusammengedrückt werden, auf eben erklärte Art bestimmen.

§. 113.

Ein Stein oder anderer Körper, wenn er freygelassen wird, fällt mit solcher Geschwindigkeit, daß er innerhalb einer Secunde 181 Zolle durchläuft. Nun aber ist aus der Naturlehre bekannt, daß die Räume, welche von frey herabfallenden Körpern durchlaufen werden, sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten, durch welche die Bewegung dauert. Man fragt also: wie weit ein solcher Stein kommen würde, wenn er 2 und $\frac{1}{2}$ Stunde oder 9000 Secunden lang fallen sollte. Folglich wie sich das Quadrat von 1 zum Quadrate von 9000 verhält, so verhalten sich 181 Zolle zum gesuchten Raume, den ein solcher Körper innerhalb $2\frac{1}{2}$ Stunde durchlaufen würde.

1 : 81000000 = 181 : 14661000000 Zolle.

Wenn man nun diese in Schuhe verändert, so findet man 1221750000: dividirt man diese Zahl durch 20000, weil eine deutsche Meile 20000 Schuhe in sich begreift, so bekommt man $61087\frac{1}{2}$ Meile. Weil nun der Mond nicht mehr dann 46440 deutsche Meilen von uns entfernt ist, so folgt, daß, wenn ein Stein $2\frac{1}{2}$ Stunden lang frey fallen sollte, er einen größern Raum durchlaufen

 würde,

würde, als die Entfernung des Mondes von unsrer Erde ist.

§. 114.

Das Licht, so von einem Körper ausfährt, wird immer schwächer, je größer die Entfernung von selbem Körper wird. Ja es ist ein in der Weltweisheit erwiesener Satz, daß die Stärke des Lichts jederzeit abnehme, wie das Quadrat der Entfernung wächst. Nun wird folgende Frage gestellt. Durch zwo angezündete Kerzen wird ein gewisses Bild genugsam erleuchtet, daß man es in der Entfernung von 5 Schuhen klar und deutlich sehen kann: wie viel dergleichen Kerzen müssen angezündet werden, daß eben dieses Bild in der Entfernung von 15 Schuhen eben so hell in die Augen falle? Man sage: Wie sich das Quadrat von 5 verhält zum Quadrate von 15, so verhalten sich 2 Kerzen zur gesuchten Anzahl.

$$25 : 225 = 2 : 18.$$

§. 115.

69696 Mann sollen ins Gevierte gestellet werden, wie viel Mann werden in eine Reihe kommen? Man ziehe die Quadratwurzel aus 69696: so findet man 264.

§. 116.

Ein großes Quadratfeld hält 760384 Quadratschuhe, wie lang ist eine jede Seite von diesem Felde? Antw. 872 Schuhe.

Dreyzehnter Abschnitt.

Von den Cubiczahlen und Ausziehung der Cubicwurzel.

§. 117.

Die Cubiczahl ist diejenige Zahl, welche entsteht, wenn man die Quadratzahl nochmals mit ihrer Wurzel multiplicirt. Die Zahl, daraus die Cubiczahl entsprungen, nennt man die Cubicwurzel.

§. 118.

Die Cubicwurzel aus einer gegebenen Cubiczahl ausziehen, heißt nichts anders, als diejenige Zahl finden, die durch ihre Quadratzahl multiplicirt, die gegebene Cubiczahl hervorbringt.

§. 119.

Die Cubiczahlen der natürlichen Zahlen läßt sich aus folgendem Wurzeltäfelein leicht einsehen: als

Wurz.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubicz.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

§. 120.

Eine Zahl, welche aus mehr nicht als dreyen Ziffern besteht, kann in ihrer Wurzel nicht mehr als eine Ziffer haben; denn die Zahl 10, welche die erste mit zweyen Ziffern ist, hat für ihre Cubiczahl 1000, welche schon aus vier Ziffern besteht. Eben so kann eine Zahl, die nicht mehr als sechs Ziffern hat, in ihrer Cubicwurzel nicht mehr als zwey Ziffern haben; denn 100, als die erste Zahl mit dreyen Ziffern hat in ihrer Cubiczahl schon sieben Ziffern, nämlich 1000000 u. s. w.

§. 121.

Die Cubicwurzel einer Zahl, die nicht mehr als drey Ziffern hat, findet man in der angesetzten Tabelle §. 119. Steht die gegebene Cubiczahl in der untern Reihe der Cubiczahlen, so ist die darüberstehende Zahl ihre Cubiczahl. Ist aber die gegebene Zahl nicht in der Reihe der Cubiczahlen anzutreffen, so ist dieselbe keine vollkommene Cubiczahl, und hat keine genaue Cubicwurzel.

§. 122.

Aus Zahlen, die mehr als drey Ziffern haben, die Cubicwurzel ausziehen, ist schon beschwer-

schwerlicher, doch wird die Berechnung erleichtert, wenn man sich folgenden Grundsatz genau bekannt macht.

Wenn man was immer für eine Zahl, z. E. 7 in zween Theile zergliedert, z. E. in 4 und 3, so wird der Cubus derselben Zahl in sich begreifen, erstens den Cubus des ersten Theils; zweytens den Cubus des zweyten Theils; drittens das Produkt aus dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils durch den zweyten multiplicirt: viertens endlich das Produkt aus dem dreyfachen Quadrate des zweyten Theils durch den ersten Theil multiplicirt. Also begreift 343 der Cubus von 7 in sich, erstens 64 den Cubus des ersten Theils 4: zweytens 27 den Cubus des zweyten Theils 3: drittens 144 das Produkt aus 48 dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils 4 durch den zweyten Theil 3 multiplicirt. Viertens endlich 108 das Produkt aus 27 dem dreyfachen Quadrate des zweyten Theils 3 durch den ersten Theil 4 multiplicirt. Denn 64 + 27 + 144 + 108 = 343.

§. 123.

Aus einer gegebenen Cubiczahl die Cubicwurzel ausziehen.

Erstens: Theile man die gegebene Zahl in Klassen ab, von der Rechten gegen die Linke, und gebe jeder Klasse drey Ziffern, die

erste ausgenommen, welche zuweilen nur aus einer oder aus zweyen Ziffern bestehen kann. Soviel man Klassen bekommt, soviel Ziffern muß die Wurzel haben (§. 119).

Zweytens: Suche man in der Wurzeltabelle Cubiczahlen (§. 119.) den größten Cubus, welcher in der ersten Klasse enthalten ist. Ziehe diesen von der ersten Klasse ab. Die Wurzel dieses Cubus schreibe man hinter einen gezogenen Verticalstrich. Solchergestalt hat man den ersten Theil der verlangten Wurzel.

Drittens: Zu dem Reste, welcher nach der Abziehung geblieben ist, setze man die nächste Klasse herab. Multiplicire den ersten schon gefundenen Theil der Wurzel durch sich selbst, und das hieraus entstandene Quadrat durch 3: das Produkt schreibe man als einen Divisor unter den besagten Rest sammt der angehängten zweyten Klasse, doch also, daß die zwey letzten Ziffern der neu herabgesetzten Klasse leer bleiben, und nicht mit zur Division gebraucht werden. Alsdenn dividire man gewöhnlichermaßen: der Quotient ist der zweyte Theil der Wurzel.

Viertens: Multiplicire man den Divisor durch den Quotienten: das Produkt schreibe man also darunter, daß die letzte Ziffer desselben unter die erste Ziffer der neuen herabgesetzten Klasse zu stehen komme. Multiplicire man wieder

den

den neu gefundenen Quotienten durch sich selbst, hernach durch 3, endlich durch den schon vorhergefundenen Theil der Wurzel: das Produkt schreibe man also darunter, das die letzte Ziffer desselben unter der zweyten Ziffer der neu herabgesetzten zweyten Klasse zu stehen komme. Multiplicire man endlich den neu gefundenen Quotienten zweymal durch sich selbst: das Produkt schreibe man also darunter, daß die letzte Ziffer desselben unter die letzte Ziffer der zweyten Klasse zu stehen komme.

Fünftens: Addire man diese drey Produkte zusammen: die Summe ziehe man von dem gebliebenen Reste sammt der angehängten zweyten Klasse ab. Wenn man nun, von dem dritten Punkte der Regel angefangen, bey den noch übrigen Klassen alles wiederholet, so erhält man die verlangte Cubicwurzel.

Zum Exempel.

Welche ist die Cubicwurzel der Zahl 47437928? Man theile die gegebene Zahl in ihre Klassen ab, wie man unten sieht. Suche man in der Tabelle der Cubiczahlen den größten Cubus, welcher von der ersten Klasse 47 kann abgezogen werden. Man findet 27: schreibe man diese 27 unter 47: die Wurzel 3 aber, so in besagter Tabelle oberhalb steht, schreibe man zur Rechten der gegebenen Zahl hinter den Strich. Ziehe man 27 von 47 ab; zu dem Reste 20 setze man die nächste Klasse herab.

ab. Man bekommt 20437. Nun multiplicire man den ersten schon gefundenen Theil der Wurzel, nämlich 3, durch sich selbst: das Produkt 9 multiplicire man mit 3: das Produkt 27 schreibe man unter den Rest sammt der angehängten zweyten Klasse also, daß die letzten zwey Ziffern 37 leer bleiben: dividire man nun 204 durch 27: den Quotient 6 schreibe man als den zweyten Theil der gesuchten Wurzel hinter dem Striche neben den zuvor gefundenen ersten Theil. Multiplicire man den Divisor 27 durch diesen neu gefundenen zweyten Theil 6: das Produkt 162 schreibe man also unter den Rest sammt der angehängten zweyten Klasse, daß die letzte Ziffer 2 unter 4 zu stehen komme. Multiplicire man diesen zweyten Theil 6 durch sich selbst: das Produkt 36 multiplicire man durch 3: das Produkt 108 multiplicire man durch den ersten Theil 3: das Produkt 324 schreibe man also darunter, daß die letzte Ziffer 4 unter 3 zu stehen komme: multiplicire man endlich den zweyten Theil durch sich selbst: das Produkt 36 wieder durch 6: den Cubus 216 schreibe man also unter die zweyte Klasse, daß die letzte Ziffer unter dem letzten derselben zu stehen komme: addire man alle drey also erhaltene Produkte zusammen: die Summe ist 19656: diese ziehe man von der zweyten Klasse ab: so bekommt man einen neuen Rest 781. Neben diesen schreibe man die dritte Klasse: und man bekommt 781928.

Multi-

Multiplicire man den bisher gefundenen Theil der Wurzel nämlich 36 durch sich selbst, das Produkt 1296 durch 3: durch das Produkt 3888 dividire man den gebliebenen Rest sammt der angehängten dritten Klasse, doch so, daß die zwo letzten Ziffern 28 nicht mit zur Division genommen werden, mit einem Worte: dividire man 7819 durch 3888. Der Quotient ist 2: diesen schreibe man als den dritten Theil der Wurzel neben die zween vorigen Theile: mit eben diesem 2 multiplicire man den Divisor 3888: das Produkt 7776 schreibe man unter die dritte Klasse, doch also, daß die letzten zwey Ziffern derselben frey bleiben. Multiplicire man den eben gefundenen Theil der Wurzel, nämlich 2 durch sich selbst, das Produkt 4 multiplicire man mit 3: das Produkt 12 multiplicire man mit dem schon zuvor gefundenen Theile der Wurzel, nämlich mit 36: das Produkt 432 schreibe man also unter, daß die letzte Ziffer der dritten Klasse frey bleibe. Endlich multiplicire man den letzt gefundenen zweyten Theil der Wurzel, nämlich 2 durch sich selbst, das Produkt 4 abermal durch 2, das Produkt 8 schreibe man unter, also, daß die letzte Ziffer desselben (wenn es aus mehrern besteht) unter der letzten Ziffer der dritten Klasse zu stehen komme: addire man alle drey also erhaltene Produkte zusammen: die Summe ist 781928, diese, wenn man abzieht, so bleibt kein Rest. 362 ist also die verlangte Wurzel.

47	437	928 $\sqrt{362}$
27		
20	437	
7	7	
16	2	
3	24	
	216	
19	656	
*	781	928
	388	8
	777	6
	4	32
		8
	781	928
		0

Erste Anmerkung. Man hat in eben angezogenem Exempel bey der zweyten Classe, da man 204 durch 27 dividirt hat, 6 als den Quotienten angenommen. Nun ist 27 in 204 nicht nur 6mal enthalten. Allein, wenn man 7 als den Quotienten angenommen, und alsdenn nach der vorgeschriebenen Regel die drey gehörigen Produkte gestaltet, und zusammen addirt hätte, so würde man eine Summe erhalten haben, welche von der zweyten Classe nicht hätte können abgezogen werden. Aus welchem man dann würde geschlossen haben, der Quotient 7 sey zu groß. Und diese Regel muß man allezeit merken: wenn aus den

drenen

dreyen Produkten eine Summe entsteht, welche größer ist, als die Classe, von der sie soll abgezogen werden: so ist der Quotient zu groß genommen worden.

Zweyte Anmerkung. Wenn eine neuerdings herabgesetzte Classe durch das dreyfache Quadrat des zuvor gefundenen Theils der Wurzel nicht kann dividirt werden, ohne die vorletzte Ziffer dieser neuen Klasse mit zum Dividendus zu rechnen, so muß man alsobald eine Nulle in der Wurzel schreiben, und alsdenn die nächstfolgende Klasse auch herabsetzen.

Zum Exempel.

```
8 | 365 | 427  √203
8 |     |
-----------------
· | 365 | 427
  | 120 | 0
    360 | 0
      5 | 40
        | 27
-----------------
    365 | 427
-----------------
        0
```

Die Ursache dieser vorgeschriebenen Regel gründet sich auf jenen Grundsatz, den man §. 122 vorangeschickt hat. In der ersten Klasse einer gegebenen Zahl ist der Cubus des ersten Theils der Wurzel enthalten, und ins

gemein

gemein noch etwas darüber. Man muß also die Wurzel aus dem darinn verborgenen Cubus ausziehen, den Cubus selbst aber von der ersten Klasse subtrahiren. In dem Reste sammt der ersten Ziffer der zweyten Klasse ist enthalten das Produkt aus dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils durch den zweyten multiplicirt: man muß also diesen Rest sammt der ersten Ziffer der neuen Klasse durch das dreyfache Quadrat des ersten Theils der Wurzel dividiren, damit man den zweyten Theil bekommt. Die zwey letzten Ziffern darf man nicht mit zur Division gebrauchen, weil diese für die zwey andere Produkte gehören, die noch in dieser zweyten Klasse stecken müssen. Man muß endlich die drey in der Regel angezeigten Produkte machen, selbe addiren, und alsdenn von der zweyten Klasse abziehen, weil alle diese Produkte gemäß dem Grundsatze §. 122. in dieser zweyten Klasse enthalten seyn müssen.

Erste Anmerkung. Wenn man die Cubicwurzel aus einem Bruche ausziehen soll, so ziehe man die Wurzel besonders aus dem Zähler, und alsdenn aus dem Nenner.

Zweyte Anmerkung. Wenn man in Ausziehung der Cubicwurzel am Ende, da keine Klasse mehr herabzusetzen übrig ist, einen Rest bekommt, so ist die gegebene Zahl kein genauer Cubus, und kann also keine genaue

Cubic-

Cobicwurzel gefunden werden. doch kann man derselben nicht nahe kommen, als immer beliebig ist; indem man immer 3 Nullen zum Reste hinzusetzt, und neue Ziffern für die Wurzeln nach der Vorschrift der Regel sucht, welche alsdenn Decimalziffern sind, und von den Ganzen durch ein Strichlein müssen abgesöndert werden.

Dritte Anmerkung. Da diese Art, die Cubicwurzel auszuziehen, vielen ziemlich beschwerlich scheinen wird, so soll also noch eine in etwas veränderte folgen.

Die drey ersten Punkte beobachte man, wie in der Regel vorgeschrieben worden ist. Nachdem man also den zweyten Theil der Wurzel gefunden hat, multiplicire man die ganze bis dahin gefundene, und also aus zweyen Ziffern bestehende Wurzel durch sich selbst: das Produkt multiplicire man noch einmal durch die ganze bis dahin gefundene Wurzel. Das Produkt ziehe man von den zwoen ersten Klassen der gegebenen Zahl ab. Zum Reste setze man die dritte Klasse herab, und wiederhole man abermal die ganze Arbeit, vom dritten Punkte angefangen, bis zum Ende.

Es sey das oben angesetzte erste Exempel wieder vorzunehmen. Die Wurzel der ersten Klasse ist 3. Nach abgezogenem Cubus 27 bleibt der Rest 20: und wenn die nächste Klasse dazu gesetzt wird, entsteht 20437. Den

zweyten Theil der Wurzel zu finden, muß man gemäß der Anfangs gegebenen Regel 204 durch 27 dividiren. Der Quotient ist 6. Nun multiplicire man 36 durch 36: das Produkt 1296 abermal durch 36: das Produkt 46656 ziehe man von den ersten zwoen Klassen der gegebenen Zahl ab, nämlich von 47437: zum Reste 781 setze man die dritte Klasse, und man bekommt 781928. Um den dritten Theil zu finden, verfahre man, wie in der ersten Regel vorgeschrieben worden: hat man diesen, nämlich 2 gefunden, so multiplicire man 362 durch 362: das Produkt 131044 abermal durch 362: das Produkt 47437928 ziehe man von der gegebenen Zahl ab; so bleibt kein Rest. Also ist 362 die verlangte Wurzel. Man sehe hier die ganze Bearbeitung.

47	437	928 $\sqrt{362}$
27		
20	437	
2	7	
46	656	
	781	928
	388	8
	47437	928
		0

§. 124.

Mehrere Kugeln verhalten sich ihrem körperlichen Inhalte, und, wenn sie von der

näm=

nämlichen Materie sind, nach ihrer Schwere, wie die Cubus ihrer Durchmesser. Nun wiegt eine eiserne Kugel von einem Schuhe oder 12 Zollen im Durchmesser beynahe 288 Pfunde. Wie viel wird also eine andere gleichfalls eiserne Kugel wägen, welche im Durchmesser 7 Zolle hat?

Man sage: wie sich der Cubus von 12, nämlich 1728 zum Cubus von 7 verhält, so verhalten sich 288 Pfunde zur gesuchten Schwere der Kugel von 7 Zollen im Durchmesser.

1720 : 343 : : 288 : 57 Pfunde beynahe.

Auf solche Art kann man gar leicht die Schwere was immer für einer Kugel, von was immer für einem Metalle, Steine oder Holze durch die Rechnung bestimmen, wenn man nur die Schwere einer Kugel von einer gewissen Größe, etwas von einem Schuhe im Durchmesser von eben selbem Metalle, Steine oder Holze kennt.

§. 125.

Ein würfelförmiges Geschirr, das ist, ein solches, welches von gleicher Länge, Höhe und Breite ist, damit es genau 3 Cubicschuhe Wasser fasse, wie lang, wie breit, wie hoch muß es seyn?

Man ziehe die Cubicwurzel aus 3, also daß man sie wenigst bis auf 2 Dezimalzahlen genau findet.

```
3 | 000 | 000 √ 1,44
1 |     |
-------------
2 | 000 |
  | 8
-------------
   12
    48
     64
-------------
   1744
    256 | 000
     58 | 8
--------------------
    235 | 2
         671
           64
--------------------
       241984
--------------------
       ·14016 u. s. f.
```

Vierzehnter Abschnitt.

Von der Decimal-Rechnung.

Von dem wahren Begriff eines Decimalbruches, und wie dieselben ausgesprochen werden müssen.

§. 126.

Die Decimalbrüche sind solche, welche die Einheit mit einer oder mehrern Nullen zu ihrem Nenner haben. Also sind $\frac{5}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{7}{1000}$, $\frac{13}{10000}$, $\frac{754}{100000}$ u. s. f. Decimalbrüche. Aber diese Nenner werden gar selten ausgedrückt: man begnügt sich, die Zähler zu schreiben, und selbe von den Ganzen durch ein Comma, oder durch einen Punkt abzusöndern; da dann allezeit die Einheiten mit so vielen Nullen, soviel der Zähler Ziffern hat, als der Nenner verstanden wird. Also bedeutet 5,4 soviel als $5\frac{4}{10}$: und 4,65 soviel als $4\frac{65}{100}$: und 3,037 soviel als $3\frac{37}{1000}$. Wenn keine Ganze zugegen sind, so wird vor dem Strichlein eine 0 geschrieben, diesen Abgang der Ganzen anzuzeigen. Also heißt 0,5 soviel als $\frac{5}{10}$, und 0,35 soviel als $\frac{35}{100}$.

§. 127.

Hieraus lernet man jeden Decimalbruch aussprechen. Man muß nämlich den Zähler

 nach

nach der gemeinen Art der ganzen Zahlen lesen, alsdenn die Einheit sammt so vielen Nullen, so viele Ziffern im Zähler sind, als den Nenner dazu setzen. Man wird diesen Bruch 0,57 also lesen: sieben und fünfzig hunderteste Theile: den Bruch 0,037 also: sieben und dreyßig tausendeste Theile, und so von andern.

Doch giebt es noch eine andere Art dergleichen Brüche auszusprechen. Denn, weil $\frac{5}{10}$ und $\frac{7}{100}$, wenn sie unter einen Nenner gebracht, und alsdenn addiret werden, $\frac{57}{100}$ Theile ausmachen; so folgt, daß man bey Decimalbrüchen entweder den ganzen Zähler auf einmal, und alsdenn den allgemeinen Nenner, oder aber jede Ziffer des Zählers besonders sammt seinem besondern Nenner aussprechen kann. Also kann man diesen Bruch 0,357 entweder aussprechen durch dreyhundert sieben und fünfzig tausendeste Theile, oder auch durch drey zehnte, fünf hunderteste und sieben tausendeste. Eben also, wenn geschrieben steht 0,0037, kann man lesen: sieben und dreyßig zehntausendeste Theile, oder aber: kein zehnter, kein hundertester Theil, dreytausendeste, sieben zehntausendeste Theile.

§. 128.

Damit man sich einen rechten Begriff von diesen Brüchen macht, betrachte man folgende

Ta-

Tabelle: man wird daraus den wahren Grund erkennen, auf welchem die ganze Berechnung der Decimalbrüche beruhet.

Ganze							Decimalen.					
6	5	4	3	2	1	8	1	2	3	4	5	6
Der Millionen	Der Hunderttausende	Der Zehntausende	Der Tausende	Der Hunderte	Der Zehner	Die Stelle der Einheiten	Der Zehnten Theile	Der Hundertesten	Der Tausendesten	Der Zehntausendesten	Der Hunderttausendesten	u. s. f.

Diese Tabelle zeigt, daß der Werth der Decimalzahlen von der Rechten zur Linken immer um zehnmal größer werde, eben wie bey den ganzen Zahlen, und daß also diese Decimalzahlen einerley Natur mit den Ganzen haben.

§. 129.

Aus diesem folgt erstens: Jede Decimalzahl bekommt ihre Benennung und ihren Werth von dem Orte, an dem sie steht.

 Also

Also ist $\begin{cases} 0{,}5 = \frac{5}{10} \\ 0{,}05 = \frac{5}{100} \\ 0{,}005 = \frac{5}{1000} \\ 0{,}0005 = \frac{5}{10000}. \end{cases}$

Zweytens: Die Nullen, welche den Decimalzahlen zur Rechten angehängt sind, verändern derselben Werth nicht. Also gilt 0,5 und 0,50 und 0,500 gleich viel, nämlich $\frac{5}{10}$.

Drittens: Aber die Nullen, welche zur Linken der Dicimalziffern stehen, vermindern ihren Werth, indem sie selbe von dem Strichlein weiter entfernen. Also 5,9 $= \frac{5}{10}$, 0,05 $= \frac{5}{100}$, und 0,0005 $= \frac{5}{10000}$. Wenn man dieses alles wohl begriffen hat, so wird man in dem, was folgt, keine Schwierigkeit mehr finden.

Von der Addition und Subtraction der Decimalzahlen.

§. 130.

Im Anschreiben der Zahlen, welche man addiren oder subtrahiren soll, habe man Acht, daß man die vom gleichen Werthe untereinander schreibe. Daher muß man das Strichlein, welches die Ganzen von den Decimalen scheidet, wohl vor Augen haben. Diese Strichlein müssen im Anschreiben alle genau unter einander stehen; wodurch es dann geschieht,

daß

daß die zehnte Theile unter die Zehnte, die Hunderteste unter die Hunderteste u. s. f. zu stehen kommen: und zur Linken des Strichlein die Einheiten unter die Einheiten, die Zehner unter die Zehner u. s. f. Alsdenn verrichte man die Addition oder Subtraction eben so, als wenn die gegebenen Zahlen lauter Ganze vorstellten. In der Summe oder in der Differenz setze man das Strichlein gerade unter das Strichlein der oben stehenden Zahlen.

Exempel der Addition.

Welches ist die Summe dieser Zahlen 34,5 + 65,3 + 12,8 + 95 + 87,81 + 7,9.

Man schreibe sie also unter einander:

	34,5
	65,3
	12,8
	95
	87,81
	7,9
Summe	403,31

II.	III.	IV.
45,07	574,678953	0,975642
50,758	95,79643	0,745257
123,0057	78,0546	0,000598
74,702	54,789	2,8007
24,8	8,9	0,64053
318,3357	812,218983	5,162727

 Exem-

Exempel zur Subtraction.

	I.	II.	III.
von : : : : :	74,284	437,5	75,0034
subtrahire man :	45,375	89,657	57,875
Der Rest ist : :	28,909	347,843	17,1284

Anmerkung.

In dem zweyten Exempel muß man sich die zween letzten Plätze rechter Hand mit Nullen besetzt vorstellen. Ja, wenn man will, kann man die Nullen wirklich hinschreiben, weil dadurch der Werth nicht geändert wird, wie schon oben ist gesagt worden.

	IV.	V.	VI.
von : :	562,	245,7578	0,547893
subtrah. man	93,5784	157,	0,49758
Der Rest ist	468,4216	088,7578	0,050313

	VII.	VIII.
von : :	0,237	1,
subtrahire man	0,228	0,997543
Der Rest ist :	0,009	0,002457

Die Probe der Addition und Subtraction wird gemacht, wie bey den Ganzen.

Zu Amsterdam ist ehemals ein Brunnen gegraben worden, wo man die Schichten, wie folgt, übereinander gefunden hat.

Schwarze Gartenerde	0,7 einer Ruthe
Torf	0,9
Weicher Thon	0,9
Sand	0,8
Gartenerde	0,4
Thon	1
Erde	0,4
Sand	1
Thon	0,2
Weiser Sand	0,4
Trockene Erde	0,5
Morast	0,1
Sand	1,4
Sandichte Lette	0,3
Sand mit Thon vermenget	0,5
Sand mit Seemuscheln vermengt	0,4
Thon	10,2
Kießlichter Sand	3,1
Summe	23,2

Wenn

Wenn man eine Portion von reinem Wasser nimmt, welche 1 Pfund wiegt, so wiegt ein Stück

Erz von gleichgroßem körperlichen Inhalt	9
Silber	11,091
Gold	19,640
Stahl	7,803
Eisen	7,645
Quecksilber	14,
Bley	11,310
Zinn	7,32
Englisch Zinn	7,295
Marmor	2,718
Grünlichtes Glas	3,620
Eichenholz	0,550
Roth Brasilianisch Holz	1,031
Buchsbäumenes Holz	1,031
Ebenholz	1,177
Buchenholz	0,738
Pantoffelholz	0,240
Gelbes Wachs	0,955
Weihrauch	1,071

Nun fragt man, wie viel wägen alle diese Stücke zusammen, das Wasser nicht mitgerechnet? Man findet: 108,235 Pfunde.

Ein

Ein Cubicschuh Wasser wiegt 72 Pfunde; ein Cubicschuh Eisen 550,440 Pfunde. Nun verliert jeder Körper, wenn er ins Wasser versenkt wird, so viel von seiner Schwere, als das Wasser, so einen gleichen Raum mit ihm einnimmt, wiegt. Wenn also ein Cubicschuh Eisen ins Wasser versenkt wird, wie viel wird er noch wägen?

	550.440
	72
Antwort:	478.440

Ein Cubicschuh von Eichenholz wiegt 39,6 Pfunde. Ein Cubicschuh Buchenholz aber 53,136. Um wie viel wiegt also dieser mehr, als jener?

	53,136
	39,6
Antwort:	13,536

Von der Multiplication der Decimalzahlen.

§. 131.

Multiplicire man beyde Factoren durch einander eben so, als wenn es ganze Zahlen wären. In dem Produkte sondere man so viele zur Rechten stehende Ziffern durch das Strichlein von den ganzen ab, als viele Decimalziffern in beyden Factoren zugleich sind.

Exem-

Zum Exempel.

	I	II
Der Multiplicandus	3,024	32,12
Der Multiplicator	22,3	23,3
Das Produkt	67,4352	780,516

	III	IV
Der Multiplicandus	87,546	5745
Der Multiplicator	4,36	0,0645
Das Produkt	342,46056	387,7875

Erste Anmerkung. Es ereignet sich nicht selten, daß man im Produkte nicht so viele Ziffern hat, als man gemäß der Regel durch das Strichlein abschneiden sollte. In diesem Falle muß man so viele Nullen zur Linken hinzusetzen, als nöthig sind, damit man die gehörige Anzahl der Decimalziffern abschneiden könne.

Zum Exempel.

	V	VI
Multiplicandus	0,5365	0,0347
Multiplicator	0,02435	0,0236
Das Produkt	0,013063775	0,00081892

Zweyte Anmerkung. Wenn man Decimalzahlen mit 10, 100, 1000 u. s. f. multipliciren soll, so rücke man nur das Strichlein um so viele Stellen gegen die rechte Hand, als der Multiplicator Nullen hat. Also ist

0,587

0,587 × 10 = 5,87; und 0,587 × 100 = 58,7; und 0,587 × 1000 = 587; und endlich 0,587 × 10000 = 5870.

Hier sind noch einige Exempel zur Uebung.

57,056 × 0,578 = 32,978368
76,543 × 5,4246 = 415,2151578
0,56879 × 0,5674 = 0,322731446
0,03246 × 0,02364 = 0,0007673544
87649 × 0,03687 = 3231,61863
94,35786 × 6,57869 = 620,7511100034
3,141592 × 52,7438 = 165,6995001296

Noch andere Exempel zur Uebung.

Ein Pfund Eisen verliert in dem Wasser 0.1308 eines Pfundes: ein Pfund Erz 0.1138 eines Pfundes: ein Pfund italiänischen Marmors 0,3679. Nun dieses vorausgesetzt, lassen sich folgende drey Aufgaben leicht auflösen.

Erste Aufgabe. Ein 352 Pfund schwerer eiserner Körper ist in dem Wasser versunken. Wie viel wird er im Wasser noch wägen? Was große Kräften werden erfordert, selben empor zu ziehen?

0,1308 × 352 = 46,0416 so viel verliert er im Wasser.

Dieses abgezogen von 352
giebt zum Reste : 305,9584 so viel wird er also im Wasser wägen.

Zweyte

Zweyte Aufgabe. Wie viel braucht man Kräfte, eine marmorsteinerne Statue von 573 Pfunden aus dem Wasser empor zu ziehen?

0,3679 × 573 = 210,8067 so viel verliert sie im Wasser.
Dieses abgezogen von 573
giebt zum Reste : : 362,1933 so viel wiegt sie noch im Wasser.

Dritte Aufgabe. Ein erzerner Lauf eines Stücks von 1365 Pfunden ist in das Wasser versenkt worden. Wie viele Kräfte sind nothwendig selbes daraus zu erheben?

0,1138 × 1375 = 156,4750
Dieses abgezogen von 1375
giebt zum Reste : : : 1218,5250.

Man hat also gefunden, wie viel diese versunkenen Körper noch im Wasser wägen. Wenn sie also mit um etwas größern Kräften angezogen werden, so werden sie in die Höhe getrieben werden.

Vierte Aufgabe. Wenn die Schwere eines Cubicschuhes Wasser bekannt ist, kann man durch die Multiplication auch die Schwere eben eines solchen Cubicschuhes von allen jenen Körpern finden, welche in der zweyten Aufgabe des vorhergehenden Abschnittes angesetzt sind. Wir wollen setzen, die

Pariser

Pariser Cubicschuh Wasser wäge 72 Pfunde: so darf man nur diese Zahl 72 multipliciren durch jene Zahl, welche in besagter Aufgabe neben jeder Gattung der Körper steht. Also findet man, es wäge

ein Cubicschuh Erz $72 \times 9 = 648$
Silber $72 \times 11{,}091 = 798{,}552$
Gold $72 \times 19{,}640 = 1414{,}080$
und so von den übrigen.

Fünfte Aufgabe. Es ist eine steinerne Statue in mehrere Trümmer zerschlagen. Ein Künstler soll eine vollkommen gleiche von Erz verfertigen. Nun verlangt man zu wissen, wie viele Pfunde Erz er hiezu nöthig habe. Dieses zu berechnen, kann man also verfahren: Man lasse eine viereckichte reguläre Kiste verfertigen, welche das Wasser halte. Messe die Länge und die Breite dieser Kiste sehr genau. Gesetzt, die Länge sey 4 Schuh, 3 Zolle, und 7,6 Linien, oder nachdem man alles in Linien verändert, 619,6 Linien: die Breite 2 Schuh, 3 Zolle, und 5,4 Linien, oder nach der Reduction 329,4 Linien. Multiplicire man beyde durch einander.

$$\begin{array}{r} 619{,}6 \\ 329{,}4 \\ \hline 204096{,}24 \end{array}$$ Produkt.

Dieses Produkt ist die Grundfläche der Kiste in Quadratlinien ausgedrückt. Nun

M gieße

gieße man soviel Wasser in die Kiste, als man nöthig erachtet, daß alle Trümmer der zerbrochenen steinernen Statue darinnen können versenket werden. Zeichne man an den Seiten der Kiste auf das genaueste, wie hoch das Wasser steht. Alsdenn werfe man die Trümmer der Statue alle in das Wasser. Untersuche man, so genau es möglich ist, um wie viel nun das Wasser gestiegen ist. Gesetzt, man fände, daß es um 11 Zolle und 7,3 Linien höher stehe, das ist, nach der Reduction, um 139,3 Linien: Multiplicire man die zuvor gefundene Grundfläche der Kiste mit diesen 139,3 Linien.

$$\begin{array}{r} 204096{,}24 \\ 139{,}3 \\ \hline 28430606{,}232 \end{array}$$ so ist

das Produkt der körperliche Inhalt der ganzen Statue in Cubiclinien ausgedrückt.

Untersuche man mit aller möglichen Genauigkeit, wie viel ein Cubicschuh eines reinen Wassers wiege (man muß aber einen solchen Schuh nehmen, in welchen man die Kiste abgemessen hat); wir wollen setzen, man finde 72 Pfunde. Multiplicire man diese mit 9; weil das Erz neunmal schwerer ist, als das Wasser: das Produkt 648 Pfunde ist die Schwere eines Cubicschuh Erzes. Aus diesem folgt, eine Cubiclinie von Erz wäge 0,000217017 von einem Pfunde (wie man durch die Division

vision erfahren könnte, welche wir in dem nächsten §. erklären wollen). Multiplicire man dieses mit dem oben gefundenen körperlichen Inhalte der Statue.

$$\begin{array}{r} 28430606,232 \\ 0,000217017 \\ \hline 6169,924872649944 \end{array} \text{ Produkt.}$$

Dieses Produkt ist die Schwere der zu verfertigenden Statue. Wenn man also die Decimalzahlen wegläßt, so erkennt man, daß man 6170 Pfunde Erz brauche.

Von der Division der Decimalzahlen.

§. 132.

Man erinnere sich jenes Grundsatzes: Das Produkt, welches aus der Multiplication des Quotienten durch den Divisor entsteht, ist jederzeit dem Dividendus gleich. Aus diesem Grundsatze, wenn man, was von der Multiplication der Decimalzahlen ist gesagt worden, dazu nimmt, fließt diese allgemeine Regel der Division. In dem Divisor und Quotienten zugleich müssen so viele Decimalziffern seyn, als viele derselben der Dividendus hat. Uebrigens verrichte man die Division mit Decimalzahlen eben so, als wenn sie alle lauter ganze Zahlen vorstellten.

Aus dieser allgemeinen Regel fließen wieder vier besondere, die in vier verschiedenen Fällen, welche in der Division der Decimalzahlen vorkommen können, dienen müssen.

§. 133.

Erster Fall. Wenn der Divisor eben so viele Decimalziffern hat als der Dividendus, so zeigen alle Ziffern des Quotienten Ganze an; wie in diesen Exempeln:

8,45) 295,75 (35	0,0078) 0,4368 (56
2535	390
4225	468
4225	468
0	0

§. 134.

Zweyter Fall. Wenn der Dividendus mehr Decimalziffern hat als der Divisor, so schneide man in dem Quotienten so viele zur Rechten stehende Ziffern durch das Strichlein ab, um so viel der Dividendus mehr Decimalziffern hat als der Divisor. Also, wenn der Dividendus vier, der Divisor aber 3 Decimalziffern hat, so muß man im Quotienten eine abschneiden: hat der Divisor drey, der Dividendus aber sieben, so muß der Quotient vier bekommen.

Zum

Zum Exempel.

```
24,3)780,516)32,12 | 436)34246,056(78,546
     729           |      3052
     ---           |      ----
     515           |      3726
     486           |      3488
     ---           |      ----
      291          |       2380
      243          |       2180
      ---          |       ----
       486         |        2005
       486         |        1744
       ---         |        ----
        0          |         2616
                   |         2616
                   |         ----
                   |          0

        0,534) 0,30438 (0,57
                2670
                ----
                3738
                3738
                ----
                 0
```

Anmerkung.

Wenn nach vollbrachter Division ein Rest bleibt, so kann man diesen Rest außer Acht lassen, wenn man sieht, daß der Quotient schon etliche Decimalzahlen hat, und also schon genau genug gefunden ist: oder wenn der Quotient noch keine oder sehr wenige Decimalen hat, und hiemit noch nicht gar genau gefunden ist; so kann man zu diesem Reste

eine 0 setzen, und die Division weiter fortsetzen: bleibt nach dieser Division noch ein Rest, so kann man noch eine 0 hinzusetzen, und in der Division fortfahren, u. s. f. so lang es beliebt, und bis man erkennet, daß nunmehr der Quotient genug Decimalen hat, und hiemit der Fehler, der aus Verachtung des letzten Restes entsteht, nicht mehr beträchtlich ist. Jedoch muß man hiebey dieses merken, daß man alle hinzugesetzte 0 als Decimalziffern des Dividendus betrachte, und im Quotienten so viele letzte Ziffern durch das Strichlein absondere, als viele alle Decimalziffern des Dividendus erfordern.

Zum Exempel.

```
2,35) 1356 (5,7702
      1175
  ------------
       1810
       1645
  ------------
        1650
        1645
  ------------
         500
         470
  ------------
          30
```

In diesem Exempel waren Anfangs im Dividendus zwo Decimalzahlen; man hat aber in der Fortsetzung der Division vier 0 hinzugethan; wenn man also diese als Decimalzahlen

betrach-

betrachtet, so sind nunmehr sechs Decimalziffern im Dividendus. Im Divisor sind zwey Decimalziffern: Es müssen also im Quotienten vier seyn: und folglich muß das Strichlein nach 5 gesetzt werden. Der letzte Rest wird vernachläßiget, weil man im Quotenten schon vier Decimalziffern hat; und also nicht mehr um einen zehntausendesten Theil eines Ganzen fehlen kann: welcher Fehler nicht mehr zu achten ist. Dieses wird noch besser weiter unten erklärt werden.

§. 135.

Dritter Fall. Wenn der Dividendus weniger Decimalziffern hat, so setze man am Ende des Dividendus alsobald, bevor man die Division anfängt, so viele o hinzu, als erklecklich sind, daß die Anzahl der Decimalziffern des Dividendus jener des Divisors gleich werde. Wenn alsdenn die Division zum Ende gebracht ist, so zeigen die Ziffern des Quotienten lauter Ganze an.

Zum Exempel.

3,521) 19743655,4

Setzt man, bevor man die Division anfängt, zwo Nullen zum Dividendus; weil im Divisor drey Decimalziffern sind, der Dividendus aber nur eines hat. Das Exempel wird alsdenn also stehen, und die Division also fortlaufen, wie man hier sieht:

2,521) 197436455,400 (7831676$\frac{204}{2521}$
17647
20966
20168
7985
7563
4225
2521
17044
15126
19180
17647
15330
15126
204

Zum Exempel.

1,32) 3036

Setzt man, bevor man die Division anfängt, zwo Nullen zu Dividendus, weil im Divisor zwo Decimalzahlen sind, der Dividendus aber keine hat. Das Exempel wird alsdenn also stehen, und die Division also laufen, wie man hier sieht:

132) 3036,00 (2300 lauter Ganze.
264
396
396
0

Drittes Exempel.

0,3021) 50142

Setze man, bevor man die Dision vornimmt, vier Nullen zum Dividendus; denn wird der Dividendus soviel Decimalziffern bekommen, als der Divisor hat. Die Division selbst wird also lauten.

```
0,3021) 50142,0000 (165978 462/3021
        3021
        -----
        19932
        18126
        -----
         18060
         15105
         -----
          29550
          27189
          -----
           23610
           21147
           -----
            24630
            24168
            -----
              462
```

Anmerkung.

In dem ersten und dritten Exempel kann man den zuletzt gebliebenen Rest in Gestalt eines Bruches anschreiben, nach und nach einige Nullen dazusetzen, und also in der Division fortfahren; da dann die neu entstandenen Ziffern so viele Decimalziffern des Quotienten seyn würden.

§. 136.

§. 136.

Vierter Fall. Wenn nach verrichteter Division nicht so viele Ziffern im Quotienten sind, als man gemäß der Regel abschneiden sollte, so setze man zur Linken so viele Nullen hinzu, als man nöthig hat.

Zum Exempel.

```
956) 7,24648 (0,00758
     6 692
     -----------
      . 5544
        4780
     -----------
      . 7648
        7648
     -----------
           0
```

Weil in diesem Exempel der Dividendus fünf Decimalziffern hat, der Divisor aber gar keine, so muß der Quotient gleichfalls fünf bekommen. Nun aber bekömmt in der wirklichen Division der Quotient nur drey Ziffern, nämlich 758; man setze also noch zwo Nullen vor dieselbe, und alsdenn das Strichlein, und vor dieses noch eine Nulle, zum Zeichen, daß die Ganzen abgehen.

Zum Exempel.

$$0,575)\ 0,0007475\ (0,0013$$

575
1725
1725
0

Weil in diesem Exempel der Dividendus sieben, der Divisor drey Decimalziffern hat, so muß der Quotient vier bekommen. Wenn man nun die Zahl 7475 durch 575 dividirt, so entsteht der Quotient 13. Man setze also noch zwo Nullen davor, und alsdenn das Strichlein; so hat man den wahren Quotienten.

§. 137.

Anmerkung.

Wenn man Decimalzahlen durch 10, 100, 1000 u. s. f. dividiren soll, so rücke man das Strichlein um so viele Stellen zur Linken, als viele Nullen der Divisor hat. Also ist

10)	5784	(578,4
100)	5784	(57,84
1000)	5784	(5,784
10000)	5784	(0,5784

Hier sind noch einige Exempel zur Uebung in welchen alle vier Fälle vorkommen.

57,4	4930,66	85,9
574	493,066	0,859
574	49 3066	0,0859
5,74	4930,66	859
5,74	49,3066	8,59
0,0574	0,493066	8,59
5,74	493066	85900
0,0574	493,066	8590

Man lasse nun die Anwendung in einigen praktischen Aufgaben, in denen die Multiplication sowohl als Division mit Decimalzahlen vorkömmt, machen.

Erste Aufgabe. Ein Cubicschuh Silber wiegt 798,552 Pfunde. Wie viel wiegt ein Cubiczoll? und wie viel eine Cubiclinie?

Weil ein Cubicschuh 1728 Cubiczolle in sich hat, so dividire man 798,552 durch 1728. Der Quotient ist 0,462125: und dieses ist die Schwere eines Cubiczolles. Weil nun ein Cubiczoll abermal 1728 Cubiclinien in sich begreift, so dividire man 0,462125 durch 1728. Der Quotient 9,000268 giebt die Schwere einer Cubiclinie.

Anmerkung.

Um aus dem gegebenen Durchmesser eines Cirkels die Peripherie desselben zu finden; muß man den Durchmesser mit 3,14159 multipliciren. Wenn die Peripherie gefunden ist,

so

so bekommt man die Fläche desselben Cirkels, wenn man den vierten Theil des Durchmessers mit der Peripherie multiplicirt. Ist die Cirkelfläche bekannt, welche entsteht, wenn eine Kugel mitten entzwey geschnitten wird, so findet man die ganze Oberfläche der Kugel, wenn die Fläche desselben Cirkels mit 4 multiplicirt wird: und wenn man die Oberfläche der Kugel mit dem sechsten Theile des Durchmessers multiplicirt, so erhält man den körperlichen Inhalt dieser Kugel. Alles dieses ist in der Geometrie erwiesen. Nun dieses vorausgesetzt; sey

Die zweyte Aufgabe. Es ist eine eiserne Kugel: sie hat 1 Schuh, 2 Zolle, 3,6 Linien im Durchmesser. Man verlangt zu wissen die Größe der Cirkelfläche, welche entstehen würde, wenn die Kugel mitten entzwey getheilet würde: zweytens die Oberfläche der ganzen Kugel: drittens ihren körperlichen Inhalt: viertens ihr Gewicht oder ihre Schwere.

Wenn man den Durchmesser in lauter Linien ausdrückt, so bekommt man 171,6 Linien. Hieraus entsteht

$171{,}6 \times 31459 = 539{,}096844$ die Peripherie.
$171{,}6 : 4 = 42{,}9$: : : der vierte Theil des Durchmessers.

$539{,}096844 \times 42{,}9 = 23127{,}2546076$ die Fläche des Cirkels in Quadratlinien.

23127,

23127,2546076 × 4 = 92509,0184304 die Oberfläche der ganzen Kugel in Quadratlinien.

171,6 : 6 = 28,6 : : der sechste Theil des Durchmessers.

92509,0184304 × 28,6 = 2645757,92710944 der körperliche Inhalt der ganzen Kugel in Cubiclinien.

Ein Cubicschuh hält in sich 12 × 12 × 12 oder 1728 Cubiczolle: ein Cubiczoll 1728 Cubiclinien. Also hält ein Cubicschuh in sich 1728 × 1728 oder 2985984 Cubiclinien. Dividirt man also den in Cubiclinien gefundenen körperlichen Inhalt durch diese Zahl: so bekommt man

2645757,92710944 : 2985984 = 0,88605897

Ein Cubicschuh von Eisen wiegt 550,440 Pfunde. Hieraus entsteht

0,88605897 × 550,440 = 487,7222994680 die Schwere der gegebenen Kugel.

§. 138.

Anmerkung.

Die magdeburgischen Halbkugeln, wenn die Luft rein ist ausgepumpet worden, werden von der darauf liegenden Luft so stark aneinander gedrückt, soviel eine Säule von Quecksilber, welche die Fläche der Halbkugel zu ihrer Grundfläche, und 26 Zolle oder 312 Linien

in der Höhe hätte, wägen würde. Nun aber findet man den körperlichen Inhalt einer solchen Säule, wenn man die Grundfläche durch die Höhe multiplicirt.

Dritte Aufgabe. Zwo magdeburgische Halbkugeln haben im Durchmesser 8 Zolle 4,6 Linien, oder 100,6 Linien. Wenn alle Luft aus ihnen herausgezogen würde, wie stark würden sie an einander halten?

100,6 × 3,14159 = 316,043954 die Peripherie.
100,6 : 4 = 25,15 : : : der vierte Theil des Durchmessers.

316,043954 × 25,15 = 7948,5054431 die Cirkelfläche der Halbkugel.

7948,5054431 × 312 = 2479933,6982472 der körperliche Inhalt der merkurialischen Säule der Cubiclinien.

2479933,6982472 : 2985984 = 0,8305248 eben dieser körperliche Inhalt in Cubicschuhen.

72 × 14 = 1008 : : Schwere eines Cubicschuhes Quecksilbers.

0,8305248 × 1008 = 837,1689984 Schwere der merkurialischen Säule in Pfunden ausgedrückt, und zugleich die Kraft, mit welcher die Halbkugeln zusammenhangen.

Anmer-

Anmerkung.

Ein Körper, dessen Grundfläche ein Cirkel ist, und welcher über das von unten hinaufwärts immer, bis er endlich in eine Spitze zusammen läuft, also abnimmt, daß, wo man denselben immer parallel mit der Grundfläche durchschnitte, der Durchschnitt eine Cirkelfläche wäre, wird ein Kegel genannt. Nun ist ein solcher Kegel der dritte Theil eines Cylinders, welcher eben dieselbe Grundfläche und Höhe hat.

Vierte Aufgabe. Die Grundfläche eines gewissen Kegels hat im Durchmesser 9 Zolle, und 4,4 Linien, oder 112,4 Linien. Die Höhe ist 11 Zolle und 3,7 Linien, oder 135,7 Linien. Wie groß ist sein körperlicher Inhalt?

112,4 × 3,14159 = 353,114716 die Periph.
112,4 : 4 = 28,1 : : : der vierte Theil des Durchmessers.

353,114716 × 28,1 = 9922,5235196 die Grundfläche in Quadratlinien.

9922,5235196 × 135,7 = 1346486,44160972 der körperliche Inhalt des Cylinders in Cubiclinien.

1346,486,44160972 : 3 = 448828,813869906 der körperliche Inhalt des Kegels in Cubiclinien.

448828,813869906 : 72 = 259,738896915 eben dieser körperliche Inhalt in Cubiczollen.

Von

Von Veränderung der gemeinen Brüche in Decimblbrüche, und im Gegentheile der Decimalbrüche in gemeine.

§. 139.

Ein jeder gemeiner Bruch kann in einen Decimalbruch auf folgende Art verändert werden. Man setze am Ende zu dem Zähler eine 0 hinzu: dividire ihn alsdenn durch seinen Nenner: der Quotient wird die erste Decimalziffer seyn. Man multiplicire den Divisor durch den Quotienten: das Produkt ziehe man vom Dividendus ab: bleibt kein Rest, so ist der gefundene Decimalbruch dem gegebenen gleich; bleibt aber ein Rest, so setze man zu diesem Reste abermal eine 0: wiederhole die Division mit seinem Nenner; und dieses so lange, bis man nach einer Abziehung keinen Rest mehr bekommt. Geschieht dieses, so sind die bis dahin erhaltenen Decimalziffern dem gegebenen Bruche vollkommen gleich. Also ist $\frac{2}{5} = 0,4$: und $\frac{3}{4} = 0,75$.

Es ereignet sich aber nicht selten, daß immer ein Rest bleibe, soviel man immer Nullen hinzusetzt, und so oft man immer die Division wiederholt. In diesem Falle nun, kann kein Decimalbruch gefunden werden, welcher dem gegebenen vollkommen gleich ist. Unterdessen kann man doch einen Decimalbruch finden, der dem gegebenen so nahe kömmt, als man

immer will, und für nöthig erachtet; denn, wenn man die Diviſion dreymal wiederholt, und alſo drey Decimalziffern ſucht, ſo fehlt man nicht mehr als um einen tauſendeſten Theil eines Ganzen. Wiederholt man die Diviſion viermal, ſo fehlt man nicht mehr um einen zehntauſendeſten Theil eines Ganzen u. ſ. f. Alſo kann der Bruch $\frac{4}{7}$ in einen ihm vollkommen gleichen Decimalbruch niemal verändert werden. Jedoch, wenn man viermal eine 0 hinzuſetzt, und alſo die Diviſion viermal wiederholt, ſo wird es alſo hergehen.

```
7) 40 (0,5714
   35
   ---
    50
    49
    ---
     10
      7
     ---
      30
      28
     ---
       2
```

Und dieſer Decimalbruch 0,5714 kommt dem gegebenen ſo nahe, daß er um keinen zehntauſendeſten Theil zu klein iſt. Sollte man die Diviſion noch öfters wiederholen, ſo würde man dem gegebenen Bruche immer noch näher kommen.

§. 140.

Es ſieht alſo ein jeder ſelbſt, daß man in Veränderung der gemeinen Brüche in Decimal=

cimal=

cimalbrüche, nachdem man einige Decimalziffern gefunden hat, die Division unterbrechen kann, obwohl noch ein Rest geblieben ist. Denn, was liegt daran, ob man etwas um einen zehntausendesten Theil eines Guldens fehle oder nicht? Jedoch kann man hierinn keine allgemeine Regel geben, wie viel man Decimalziffern suchen müsse, ehe man abbrechen darf; denn dieses hängt von dem Gegenstande der Berechnung ab. Rechnet man von Kreuzern, so könnte man aufhören, sobald man die erste Decimalzahl gefunden hat: weil es ja genug ist, wenn man um keinen zehnten Theil eines Kreuzers fehlt. Rechnet man von Gulden, so könnte man abbrechen, nachdem man drey Decimalziffern gefunden hat; weil der Fehler von einem oder andern zehntausendesten Theil eines Gulden nicht mehr zu achten ist.

Dieses ist zu verstehen für jenen Fall, da die Rechnung schon am Ende ist; denn, wenn man den also beynahe gefundenen Bruch noch mit einer ganzen Zahl multipliciren müßte, so könnte der Anfangs kleine Fehler nach der Multiplication beträchtlich seyn; weil also, gleichwie der Bruch, so auch der Fehler desselben multiplicirt würde. Gesetzt, man hätte gefunden, ein Pfund einer gewissen Waare koste 3 Gulden und $\frac{4}{7}$ eines Gulden; ferner, man hätte diesen Bruch in einen Decimalbruch verändert, und für den Werth eines Pfundes angesetzt 3,571. Der Fehler würde sich auf 4 zehntausendesten Theile eines Gulden belaufen, welcher Fehler in der

That nicht zu achten wäre. Ferner: man hätte 1000 Pfunde dieser Waare, und verlangte den ganzen Werth derselben zu wissen. Man müßte zu diesem Ende den Werth 3,571 eines Pfundes mit 10000 multipliciren: das Produkt würde seyn 35710 Gulden. Allein dieses Produkt wäre um mehr als 4 Gulden zu klein; weil der im ersten Decimalbruch steckende Fehler mit 10000 multiplicirt über 4 Gulden steigt. In diesem Falle dann merke man diese Regel. Man suche so viele Decimalziffern, bis man erkennt, daß der Fehler vor der Multiplication nicht mehr beträchtlich sey: und alsdenn suche man noch soviel, ja noch um eine mehr, als Ziffern im Multiplicator sind, welche Ganze vorstellen. Also muß man im vorigen Exempel, erstens drey Decimalziffern suchen, weil einige tausendeste Theile eines Gulden noch beträchtlich sind: man muß über das noch fünf andere suchen, weil der also gefundene Bruch mit 10000 muß multiplicirt werden. Man wird also für den Werth eines Pfundes finden 3,57142857. Wenn man diesen mit 10000 multiplicirt, so bekommt man 35714,2857 als den Werth der ganzen Waare.

§. 141.

Die meisten aus jenen Dingen, die in der Rechnung vorkommen, pflegen nicht in 10, 100, 1000 u. s. f. Theile abgetheilt zu werden. Wenn man also neben den Ganzen einen Decimalbruch bekommt, so weiß man nicht, was dieser Bruch austrage, wenn er nicht in einen andern verändert

dert wird, der eine solche Zahl zum Nenner hat, in welche das Ganze, von dem damals die Rede ist, pflegt abgetheilt zu werden. Nun diese Veränderung muß auf eben die Art geschehen, wie oben gesagt worden. Man muß nämlich die Decimalziffern mit dem Nenner multipliciren, den man dem neuen Bruche geben wolle, und das Produkt mit dem Nenner eines Decimalbruches dividiren, oder, weil ein Decimalbruch allezeit die Einheit mit einigen Nullen zum Nenner hat, so viele Ziffern vom Produkte rechter Hand abschneiden, als Nullen in dem Nenner sind. Die überbleibenden Ziffern sind der Zähler des neuen Bruchs. Z. E. Man soll 0,5 einer Stunde in einen andern Bruch verändern, dessen Nenner 60 ist. Man multiplicire 5 durch 60: das Produkt ist 300. Dieses dividire man durch 10, oder was eines ist, man schneide die letzte Ziffer ab: so bleibt 30 der Zähler des verlangten Bruchs, welcher also ist $\frac{30}{60}$, das ist, 30 Minuten oder eine $\frac{1}{2}$ Stunde.

Hier sind noch einige Exempel. Wie viele Kreuzer gilt der Bruch 0,9 eines Gulden? Man multiplicire 9 durch 60. Vom Produkt 540 schneide man die letzte Ziffer ab, so bleiben $\frac{54}{60}$, das ist 54 Kreuzer.

Wie viele Stunden, Minuten und Secunden gilt der Bruch 0,6256944 eines Tags? Weil ein Tag in 24 Stunden pflegt eingetheilt zu werden, so muß man diesen Bruch in einen andern verändern, dessen Nenner 24 ist. Man multiplicire also 6256944 durch 24, das Pro-

dukt ist 150166656. Von diesem schneide man 7 Ziffern ab, weil der Nenner des gegebenen Bruchs neben dem 1 sieben Nullen hat, so bleiben 15 Stunden. Diese abgeschnittenen Ziffern 0166656 sind ein Decimalbruch einer Stunde. Um nun diesen in Minuten zu verändern, multiplicire man ihn mit 60. Das Produkt ist 9999360. Man schneide 7 Ziffern ab, so bleibt nichts übrig. Man bekommt also keine Minute. Die abgeschnittenen sieben Ziffern 9999360 sind ein Decimalbruch einer Minute. Um diesen in Secunden zu verändern, multiplicire man ihn mit 60, das Produkt ist 999961600. Man schneide sieben Ziffern ab, es bleiben 59 Secunden. Die abgeschnittenen sieben Ziffern sind ein Decimalbruch einer Secunde, welchen man in Terzen verändern kann, wenn man es für nöthig erachtet. Man würde finden 59 Terzen, weil also 59 Terzen sehr nahe eine Secunde gelten, so könnte man sie ohne beträchtlichen Fehler für eine Secunde annehmen. Man hat also 60 Secunden; und weil 60 Secunden eine Minute ausmachen, so erkennt man, daß 0,6256944 eines Tages 13 Stunden und eine Minute gelten.

Ende des ersten Theils.

Des zweyten Theiles erster Abschnitt.

Von den Größen.

§. 1.

Unter einer Größe versteht man alles dasjenige, was sich vermehren, oder vermindern läßt, oder zu der etwas hinzugethan, oder davon weggenommen werden kann.

§. 2.

Alle Größen, welche das Zeichen + (so plus oder mehr ausgesprochen wird) vor sich haben, nennt man bejahende oder positive Größen: hingegen alle Größen, welche das Zeichen — (so minus oder weniger ausgesprochen wird) vor sich haben, nennt man verneinende oder negative Größen.

§. 3.

Durch die bejahende oder positiven Größen stellt man sich den wirklichen Besitzstand einer Sache vor; so wie im Gegentheile die verneinenden oder negativen Größen den Mangel desselben andeuten.

§. 4.

Einfache oder einzelne Größen sind diejenigen, die nur durch einen Buchstaben angezeigt werden; zusammengesetzte Größen aber solche, so aus zwey oder auch aus mehreren Größen durch die Zeichen + oder — verbunden oder abgesondert werden.

§. 5.

Diejenige Wissenschaft, welche aus einigen gegebenen Größen andere ihres Gleichen, von denen in Ansehung der gegebenen etwas bekannt gemacht wird, durch gewisse Gleichungen zu finden, lehrt, wird die gemeine Algebra genannt.

§. 6.

Die Buchstaben-Rechenkunst zeigt, wie man statt der Ziffern allgemeine Zeichen der Größen sich bedienen, und damit die gewöhnlichen Rechnungsarten verrichten könne.

§. 7.

Alle bekannten Größen werden mit den Anfangsbuchstaben des Alphabeths; die unbekannten Größen aber mit den letzten Buchstaben des Alphabeths benennet.

§. 8.

Diejenigen Zahlen, welche den Buchstaben vorgesetzt werden, heißt man Coeficienten. Z. E. $4a$ sey die Größe, so ist 4 der Coeficient.

§. 9.

Diejenige Zahlen, welche den Größen oben angesetzt werden, nennt man die Exponenten der Größen. Z. E. Bey a^4 ist die Zahl 4 oberhalb der Größen der Exponent von a.

Zweyter Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit ganzen Größen.

§. 10.

Was von der Addition bey den Zahlen gelehrt worden ist, das nämliche gilt auch bey der Algebra, und sind hiebey die drey Fälle wohl zu merken. Als:

1) sind die Größen von einerley Art, und haben dieselbe einerley Zeichen:

2) sind die Größen von einerley Art; haben aber verschiedene Zeichen: und

3) sind die Größen nicht von einerley Art: und haben zum Theil einerley oder aber auch verschiedene Zeichen.

§. 11.

Bey dem ersten Fall, wenn die Größen von einerley Art sind, und auch einerley Zeichen haben, wird die Addition wie in der gemeinen Rechenkunst verrichtet. Z. E.

	a	$-a$	$5b$	$-7bc$
	a	$-a$	$3b$	$-8bc$
Summe	$2a$	$-2a$	$8b$	$-15bc$

	$3a+5b$	$3a-5b$	$6ab+12$
	$2a+7b$	$2a-7b$	$3ab+24$
Summe	$5a+12b$	$5a-12b$	$9ab+36$

$$\begin{array}{r} a+2b-c+5d \\ 6a+3b-5c+2d \\ \hline \text{Summe } 7a+5b-6c+7d \end{array}$$

§. 12.

Im zweyten Fall; wenn die Größen, wie im ersten Fall, von einerley Art sind, aber verschiedene Zeichen haben, so ziehe man von der größern Größe die kleinere Größe ab, und zu dem Rest setze man das Zeichen der größern Größe. Z. E.

	$5a$	$-5a$	$7bc$	$-9abd$
	$-3a$	$+3a$	$-6bc$	$+7abd$
Summe	$+2a$	$-2a$	$+bc$	$-2abd$

	$+7a-5b$	$-8ab-7bc+15$
	$-5a+7b$	$+12ab+7b-24$
Summe	$2a+2b$	$4ab-\,:\,:\,-9$

	$2ac-3bd+2cg-4def$
	$3ac+5bd-8cg-2def$
Summe	$5ac+2bd-6cg-6def$

§. 13.

Schon aus der Natur der Größen läßt es sich leicht einsehen, daß alle Größen, so — oder minus haben, fehlen; im Gegentheile alle Größen, die + oder plus haben, wirklich vorhanden sind. Soll man also von beyder Art addiren, so wird durch die letztere der Mangel aufgehoben, und muß folglich die Addition in eine Subtraction verwandelt werden.

§. 14.

Soll man nach dem dritten Fall Größen von verschiedener Art und von verschiedenen Zeichen zusammen addiren, so schreibe man die Größen mit Beybehaltung ihrer gegebenen Größen neben einander hin. Z. E.

	a	a	$4b+7cd$
	b	$-b$	$4a-10$
Summe	$a+b$	$a-b$	$4b+7cd+4a-10$

$a+4b$

$$\begin{array}{l} a+4b+c-3d \\ -4e-8f+h+g \\ \hline \end{array}$$

Summe $a+4b+c-3d-4e-8f+h+g$

In folgenden Exempeln sind alle drey Fälle angebracht.

$$\begin{array}{l|l} \left\{\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ -4ab \end{array}\right. & \begin{array}{l} 8ab+bc-37 \\ -7ab-bc+42-6d \end{array} \\ \hline \text{Summe } a^2-2ab+b^2 & ab \quad +5-6d \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3a^2+4abc-bb+30 \\ 2bb-3a^2-2abc-25 \\ dd+2a^2-3abc-3 \end{array}\right.$$

Summe $2a^2-abc+b^2+a^2+2$

§. 15.

Die Subtraction geschieht in der Algebra, wie in der gemeinen Rechenkunst, wenn die Größen von einerley Art, und wenn die Zeichen von einerley Art sind, und wenn die kleinere Größe von der größern Größe abgezogen werden kann. Z. E.

$$\begin{array}{l} 8a-3b+7c-8d+4f \\ 5a-2b+6c-3d+2f \\ \hline \end{array}$$

Rest $3a-b+c-5d+2f$

$$\begin{array}{l} 5ab-9bd-3dc-fg \\ 2ab+3bd-2dc-fg \\ \hline \end{array}$$

Rest $3ab+6bd-dc-\,-$

§. 16.

In dem Fall aber, wenn die Größen einerley Zeichen haben, und man die größere Größe von der kleinern Größe abziehen soll, so ziehe man die kleinere von der größern ab, und zu dem Rest setze man das Zeichen +, wenn beyde — haben; hingegen —, wenn beyde Größen + haben.

Zum Exempel.

$$\begin{array}{r} 4a - 3b + 7c - 2d \\ 6a - 4b + 9c - 5d \\ \hline -2a + b - 2c + 3d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25abc - 3cd + 13fa \\ 28abc - 9cd + 24fa \\ \hline -3abc + 6cd - 11fa \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5gh + 2ahcde - 18bf - 4ab \\ 7gh + 5ahcde - 27bf - 6ab \\ \hline -2gh - 3ahcde + 6bf + 2ab \end{array}$$

§. 17.

Sind die Zeichen verschieden, so addire man die Größen, die man subtrahiren soll, und der Summe gebe man das Zeichen derjenigen Größe, von welcher die Subtraction geschehen soll. Z. E.

$$\begin{array}{r} 5a+7b-3c+9d \\ -\ 3a-2b+2c-4d \\ \hline 8a+9b-5c+13d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -ab-3bc+8ad \\ +4ab-3ad+4bc \\ \hline -5ab+11ad-7bc \end{array}$$

Exempel für alle drey Fälle.

Von	$2a$	$-2a$	$-15bc$	$5a+12b$
subtrahire man	a	$+3a$	$-8bc$	$2a+7b$
so ist der Rest	a	$-5a$	$-7bc$	$3a+5b$

Von	bc	$-2abd$
subtrahire man	$-6bc$	$+7abd$
so ist der Rest	$+7bc$	$-9abd$

Von	$4ab-9$	$a^2-2ab+b^2$
subtrah. man	$12ab+7bc-24$	$-4ab$
so ist der Rest	$-8ab-7bc+15$	$a^2+2ab+b^2$

Von	$ab+5-6d$
subtrahire man	$-7ab-bc+42-6d$
so ist der Rest	$8ab+bc-37$

Von	$2a+2b$	$a+b$	$5bc+3ad$
subtrahire man	$-5a+7b$	$a-b$	$5bc-4ad$
so ist der Rest	$7a+5b$	$+2b$	$-7ad$

Von	$8a+5bd+25$	$c+13$
subtrah. man	$7a-3bd-12$	$3a-b-2c$
so ist der Rest	$a+8bd+37$	$3c+13-3a+b$

§. 18.

§. 18.

Bey der Multiplication hat man vier Fälle zu beobachten.

Erster Fall. Wenn vor den Buchstaben, welche miteinander sollen multiplicirt werden, einerley Zeichen ohne Coeficient stehen, so schreibt man diese Buchstaben neben einander mit dem Zeichen +, wie man hier sieht.

Zum Exempel.

Multiplicandus	a	$-a$	$a+b$	$-a-b$
Multiplicator	a	$-b$	d	$-d$
Produkt	aa	$+ab$	$ad+bd$	$ad+bd$

Zweyter Fall. Wenn die Buchstaben Coeficienten vor sich haben, so multiplicire man diese durch einander, und setze das Produkt der Coeficienten vor dem Produkt der Buchstaben.

Zum Exempel.

Multiplicandus	$5a$	$-6d$	$3a+2b$
Multiplicator	$3b$	$-7b$	6
Produkt	$15ab$	$+42bd$	$18a+12b$

Multiplicandus	$a+b$
Multiplicator	$5b$
Produkt	$5ab+5bb$

Dritter Fall. Wenn der Multiplicandus und Multiplicatore verschiedene Zeichen vor sich haben,

haben, so bekömmt das Produkt das Zeichen (—).

Zum Exempel.

Multiplicandus	a	$-6d$	$4a-7b$
Multiplicator	$-b$	$+7a$	$+3f$
Produkt	$-ab$	$-24ad$	$12af-21bf$

Vierter Fall. Wenn ein Buchstabe, welcher einen Exponenten bey sich hat, mit eben demselben Buchstaben (als b mit b), der gleichfalls einen Exponenten hat, soll multiplicirt werden; so wird im Produkt dieser Buchstabe nur einmal geschrieben, die Exponenten aber werden addirt, daß also die Summe beyder Exponenten der neue Exponent wird.

Zum Exempel.

Multiplicand.	b^2	a^3-b	$-c+3b^2$
Multiplicator	b^3	b^2	$+3c^2$
Produkt	b^5	$a^3b^2-b^3$	$+3c^3-9b^2c^2$

Wenn der Multiplicator aus mehreren Gliedern besteht, so müssen alle Glieder des Multiplicandus durch ein jedes Glied des Multiplicators multiplicirt werden. Man bekommt also so viele Partialprodukte, als viele Glieder der Multiplicator hat. Diese Partialprodukte müssen alsdenn zusammen addirt werden, und die Summe ist alsdenn das verlangte ganze Produkt. Zum Exempel.

Gesetzt:

Gesetzt: diese zwo Größen $2a + b - d$ und $a - b$ sollen mit einander multiplicirt werden, so schreibe man die letzte Größe, als den Multiplicator unter die erste, wie unten steht; hat man eine Linie darunter gezogen, so multiplicire man mit a als dem ersten Gliede des Multiplicators alle Glieder des Multiplicandus, und so entsteht das erste Partialprodukt $2a^2 + ab - ad$. Ferners multiplicire man mit dem zweyten Gliede des Multiplicators $(-b)$ alle Glieder des Multiplicandus, und so bekommt man das zweyte Partialprodukt $-2ab - b^2 + bd$. Addirt man beyde Partialprodukte zusammen, so ist die Summe $2a^2 - ad - b^2 + bd$ das verlangte ganze Produkt.

Multiplicand. $2a + b - d$
Multiplicator $a - b$

$2a^2 + ab - ad$ das erste Partialprodukt.
$-2ab - bb + bd$ das zweyte Partialprodukt.

$2a^2 - ab - ad - bb + bd$ das ganze Produkt.

Ueberhaupts, wenn Größen mit einerley oder mit verschiedenen Zeichen multiplicirt werden sollen, so ist die allgemeine Regel diese. Gleiche Zeichen geben +, verschiedene aber geben —. Z. E.

$$\begin{array}{l}
a + b + c \\
a + b + c \\
\hline
aa + ab + ac \\
\quad + ab + bb + bc \\
\qquad + ac + bc + cc \\
\hline
aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a + b - c \\
a - b - c \\
\hline
aa + ab - ac \\
- ab - bb + bc \\
\qquad - ac - bc + cc \\
\hline
aa - bb - 2ac + cc
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
4a - 3b \\
3a + 2b \\
\hline
12aa - 9ab \\
\qquad + 8ab - 6bb \\
\hline
12aa - ab - 6bb
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
-5b - 3c + 4d \\
-2d + b - c \\
\hline
+ 10bd + 6cd - 8dd \\
\qquad - 5bb - 3cb + 4bd \\
\qquad\qquad + 5cb + 3cc - 4cd \\
\hline
+ 14bd + 2cd - 8dd - 5bb + 2cb + 3cc
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
2ab - 4ac + ad \text{ Multiplicandus} \\
3ab - 5ac + 2ad \text{ Multiplicator} \\
\hline
\left.\begin{array}{l}
6a^2b^2 - 12a^2bc + 3a^2bd \\
\quad - 10a^2bc + 20a^2c^2 - 5a^2cd \\
\qquad + 4a^2bd - 8a^2cd + 2a^2d^2
\end{array}\right\} \text{Partial-produkt.} \\
\hline
6a^2b^2 - 22a^2bc + 7a^2bd + 20a^2c^2 - 13a^2cd \\
\qquad + 2a^2d^2 \text{ das ganze Produkt.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
5b^3a - 2ab^3 + 4a^2c^2 \\
2a^3b - ab^3 + 3a^2c^2 \\
\hline
10a^6b^2 - 4a^4b^4 + 8a^5bc^2 \\
\quad - 5a^4b^4 + 2a^2b^6 - 4a^3b^3c^2 \\
\qquad + 15a^5bc^2 + 6a^3b^3c^2 + 12a^4c^4 \\
\hline
10a^6b^2 - 9a^4b^4 + 23a^5bc^2 + 2a^2b^6 - 10a^3b^3c^2 \\
\qquad + 12a^4c^4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
2a^4x^2 - 3b^4y^2 \\
2a^4x^2 + 3b^4y^2 \\
\hline
4a^8x^4 - 6a^4x^2b^4y^2 \\
\quad + 6a^4x^2b^4y^2 - 9b^8y^4 \\
\hline
4a^8x^4 - : - : - 9b^3y^4.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
4ab + 3ac - c^2 \\
-5ab + 3ac - c^2 \\
\hline
-20a^2b^2 - 15a^2bc + 5abc^2 \\
\quad + 12a^2bc + 6a^2c^2 - 3ac^3 \\
\qquad - 4abc^2 - 3ac^3 + c^4. \\
\hline
-20a^2b^2 - 3a^2bc + abc^2 + 6a^2c^2 - 6ac^3 + c^4
\end{array}
$$

§. 19.

Daß + mit + multiplicirt wieder + im Produkt geben müsse; ingleichen + mit — oder — mit + das Zeichen — gebe, ist nicht schwer zu begreifen. Daß aber — mit — multiplicirt in dem Produkte + ist, scheint nicht sogleich klar zu seyn. Durch ein Exempel in Zahlen kann diese Schwierigkeit am besten gehoben werden. Z. E. Man soll 4 — 3 durch — 3 multipliciren, das heißt, man soll den Mangel — 3 so vielmal nehmen, als 4 — 3 Einheiten hat, das ist, 1 mal. Weil, wenn man Anfangs 4 mit — 3 multiplicirt, man den Mangel 4 mal und folglich dreymal zuviel genommen, so muß man denselben wieder dreymal addiren, folglich giebt — 3 mit — 3 zum Produkt + 9.

§. 20.

Die Multiplication ist immer die Probe über die Division, das heißt, wenn man den Divisor mit dem Quotienten multiplicirt, so muß der Dividendus herauskommen. Hieraus folgt nun ganz natürlich, daß bey der Division die nämliche Regel statt finden muß, wie bey der Multiplication, nämlich: Einerley Zeichen geben + ungleiche oder verschiedene Zeichen aber geben. — Z. E. Man soll die Größe ab durch a dividiren, so muß der Quotient b seyn, weil a mit b multiplicirt

zum

zum Produkt ab giebt; und hieraus folgt auch, daß, wenn ab durch b dividirt werden soll, der Quotient a seyn müsse.

Oder:

Die Division ist der Multiplication entgegengesetzt: sie hat ebenfalls vier verschiedene Fälle.

Erster Fall. Wenn der Dividendus und Divisor beyde einerley Zeichen, und keine Coefficienten haben, so werden jene Buchstaben des Dividendus, welche auch im Divisor sich einfinden, ausgelöscht: die übrig gebliebenen Buchstaben des Dividendus mit dem Zeichen + sind der Quotient.

Zum Exempel.

Dividendus	ab	$-ab$	$ad+bd$	$-ad-bd$
Divisor	b	$-b$	d	$-d$
Quotient	a	$+a$	$a+b$	$a+b$

Zweyter Fall. Wenn die Zeichen des Dividendus und des Divisors verschieden sind, so setze man vor dem Quotienten das Zeichen —

Zum Exempel.

Divid.	$-ab$	$-ab$	$-ab-bd$	$abc+bcd+bcf$
Divis.	$+a$	$-a$	$+b$	$-bc$
Quot.	$-b$	$-b$	$-a-d$	$-a-d-f$

Dritter Fall. Wenn die Buchstaben des Dividendus und des Divisors Coeficienten vor sich haben, so werden diese durch einander dividirt, wie in der gemeinen Arithmetik.

Zum Exempel.

Dividendus	$15ab$	$42bd$	$12af - 21bf$
Divisor	$3a$	$-7b$	$3f$
Quotient	$5b$	$-6d$	$4a - 7b$

Vierter Fall. Wenn ein Buchstabe in dem Dividendus und Divisor steht, und einen Exponenten hat, so wird der Exponent des Divisors von dem Exponenten des Dividendus abgezogen, und in dem Quotienten eben dieser Buchstabe geschrieben mit einem Exponenten, der dem Reste gleich ist.

Zum Exempel.

Dividendus	a^3	b^4c^2	$+b^3c$	$-8b^5c^3d$
Divisor	a^2	b^2c	$-b$	$+4b^3c^3$
Quotient	a	b^2c	$-b^2c$	$-2b^2d$

Erste Anmerkung. In diesem letzten Exempel sieht man, daß wenn ein Buchstabe in dem Divisor und Dividendus den nämlichen Exponenten hat, derselbe in dem Quotienten gar nicht geschrieben wird.

Zweyte Anmerkung. Wenn sowohl die Buchstaben als Coeficienten des Dividendus

und Divisors die nämlichen sind, so ist der Quotient 1.

Zum Exempel.

Dividendus	ab	$7ab + 5bc$	$8ab + 4d$
Divisor	ab	$7ab + 5bc$	$-8ab - 4d$
Quotient	1	1	-1

Dritte Anmerkung. Wenn der Divisor einen Buchstaben hat, der nicht in dem Dividendus steht, oder wenn ein Buchstabe in dem Divisor einen größern Exponenten hat, oder endlich, wenn der Coeficient des Divisors nicht genau und ohne Rest in dem Coeficienten des Dividendus enthalten ist, so kann die Division nicht genau verrichtet werden. In diesem Falle schreibt man den Dividendus und Divisor auf die Art eines Bruchs unter einander.

Zum Exempel.

Dividendus	$8ab$	$5a\ b$	$5a$
Divisor	$4ac$	$5a^2b$	$3a$
	$8ab$	$5a\ b$	$5a$
Quotient	$4ac$	$5a^2b$	$3a$

§. 21.

In dem Fall aber, wenn die Division nicht wirklich vorgenommen werden kann, so schreibt man die Größen als einen Bruch.

z. Ex. $\frac{a}{b}$ heißt soviel, als a soll durch b dividirt werden.

Diese Regeln zu beweisen, ist nicht nöthig, weil es fast eben so geschehen kann, wie in der Multiplication. Es wird einem jeden leicht seyn, die dort gegebenen Beweise hier anzuwenden. Die vier Regeln sind hinlänglich, so oft der Divisor nur aus einem Gliede besteht: hat er aber mehrere Glieder, so merke man Folgendes:

Ordnung halber schreibe man erstens den Divisor zu der Linken des Dividendus, und scheide beyde durch einen Verticalstrich, oder durch eine halbe Kreislinie. Zweytens, aus dem Dividendus wähle man was immer ein Glied, welches genau durch ein Glied des Divisors, sey es ebenfalls, was für eines es wolle, kann dividirt werden. Den Quotienten, der aus dieser Division entsteht, schreibe man zur Rechten des Dividendus, nachdem man zuvor einen halben Kreis gezogen hat. Drittens, mit dem Quotient, den man also gefunden hat, multiplicire man den ganzen Divisor: das Produkt wird unter den Dividendus geschrieben, und davon abgezogen, oder, welches eines ist, das Produkt wird mit Veränderung aller Zeichen angeschrieben, und alsdenn zu dem Dividendus addirt: also bekommt man einen neuen Dividendus. Viertens, aus diesem

sem wähle man sich wieder ein Glied, welches taugt, durch ein frey erwähltes Glied des Divisors genau dividirt zu werden. Der Quotient wird abermal zur Rechten neben den vorigen hin geschrieben mit seinem gehörigen Zeichen: und so fährt man immer fort, bis nach der Subtraction nichts mehr übrig bleibt. Dieß alles wird in einem Exempel verständlicher werden.

Es sey der Dividendus $ab^2 + abd + acd - ac^2$, der Divisor $ab + ad - ac$. Schreibe man beyde neben einander, wie man unten sieht. Dividire man ein Glied des Dividendus, z. Ex. ab^2 durch ein Glied des Divisors, welches zur genauen Division tauglich ist, als ab. Den Quotienten b setze man zur Rechten. Mit diesem Quotienten b multiplicire man den ganzen Divisor, das Produkt wird seyn $ab^2 + abd - abc$: dieses schreibe man unter den Dividendus, aber mit Veränderung aller Zeichen: man wird also unterschreiben $- ab^2 - abd + abc$. Nach gezogener Linie addire man dieses zu dem Dividendus, so entsteht ein neuer Dividendus $abc + acd - ac^2$. Was immer für ein Glied desselben, z. Ex. durch acd dividire man durch ein Glied des Divisors, welches zu einer genauen Division taugt, z. E. durch ad. Den Quotienten $+ c$ setze man neben den vorhergefundenen Quotienten hin. Durch diesen neuen Quotienten multiplicire man den ganzen Divisor. Das

Produkt $abc + acd - ac^2$ schreibe man mit veränderten Zeichen unter den Dividendus. Nach verrichteter Addition bleibt nichts übrig. Die Division ist also vollbracht, und $b + c$ ist der verlangte Quotient.

Divisor	Dividendus	Quot.
$ab+ad-ac$	$ab^2 abd + acb - ac^2$	$b+c$
	$-ab^2 - abd + abc$	
	$abc + acb - ac^2$	
	$-abc - acd + ac^2$	
	0	

§. 22.

Soll eine zusammengesetzte Formel durch eine einfache getheilt werden; so theile man ein jedes Glied besonders. Z. Ex. Es soll $6a - 8b + 4c$ durch 2 getheilt werden; so giebt der Quotient $3a - 4b + 2c$ und die Rechnung steht: $2 \mid 6a - 8b + 4c \mid 3a - 4b + 2c$.

oder allgemein:

a	$aa - 2ab$	$a - 2b$
	$aa - 2ab$	
	· · · ·	

§. 23.

Ist aber der Divisor selbst eine zusammengesetzte Größe, so hat die Division mehr Schwierigkeiten, weil dieselbe öfters wirklich gesche-

geschehen kann, wo es nicht zu vermuthen ist. Z. E.

Es sey der Divisor $a-b$, unter das Dividend $ac-bc$; so muß c der Quotient seyn, und das Exempel muß also stehen:

$$
\begin{array}{l|l|l}
a-b & ac-bc & c \\
 & ac-bc & \\
\hline
 & \cdot \quad \cdot &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l|l}
2a-3b & 6aa-9ab & 3a \\
 & 6aa-9ab & \\
\hline
 & \cdot \quad \cdot &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l|l}
a+b & aa+3ab+2bb & a+2b \\
 & aa+\ ab & \\
\hline
 & \cdot +2ab+2bb & \\
 & \ \ +2ab+2bb & \\
\hline
 & \cdot \quad \cdot &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l|l}
a+b & aa-bb & a-b \\
 & aa+ab & \\
\hline
 & \cdot -ab-bb & \\
 & \ \ -ab-bb & \\
\hline
 & \cdot \quad \cdot &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l|l}
3a-2b & 18aa-\ 8bb & 6a+4b \\
 & 18aa-12ab & \\
\hline
 & \quad +12ab-8bb & \\
 & \quad +12ab-8bb & \\
\hline
 & \quad \cdot \quad \cdot &
\end{array}
$$

Auf

Auf diese Weise zu dividiren könnte einen Anfänger verwirren, wie er in dem Dividendus und Divisor allezeit solche Glieder finden könne, welche zu einer genauen Division taugen. Dieser Beschwerniß zuvor zu kommen oder abzuhelfen, merke man folgendes. Erstens: erwähle man nach Belieben einen Buchstaben, welcher sowohl in dem Dividendus als Divisor befindlich ist, und ordne man alle Glieder des Dividendus und Divisors nach diesem Buchstaben also, daß jenes das erste Glied sey, in welchem dieser Buchstabe den größten Exponenten hat; das zweyte Glied jenes, in dem dieser Buchstabe einen Exponenten hat, der dem größten am nächsten kömmt u. s. f. Zweytens: dividire man alsdenn immer das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors: in dem übrigen fahre man fort, wie oben ist gesagt worden.

Anmerkung.

Wenn man durch die Addition einen neuen Dividendus erhält, muß man jederzeit sorgen, daß er nach eben demselben Buchstaben, den man Anfangs erwählet hat, geordnet bleibe: läßt sich alsdenn das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors nicht genau theilen, so ist es ein richtiges Zeichen, daß der gegebene Dividendus durch den gegebenen Divisor nicht genau könne dividirt werden. Wir wollen einige Exempel hersetzen,

setzen, in welchen der Dividendus und Divisor schon nach einem gewissen Buchstaben geordnet sind: im ersten nach x: im zweyten nach c: im dritten nach a.

Divisor	Dividendus	Quotient
$2c^2+3bc-b^2$	$4c^4-9b^2c^2+6b^3c-b^4$	$2c^2-2bc+b^2$
	$-4c^4-6b\,c^3+2b^2c^2$	
	$-6b\,c^3-7b^2c^2+6b^3c-b^4$	
	$+6b\,c^3+9b^2c^2-3b^3c$	
	$2b^2c^2+3b^3c-b^4$	
	$-2b^2c^2+3b^3c+b^4$	
	0	

Divisor	Dividendus	Quotient.
$a^2-2ab+6b^2$	$2a^4-7a^3b+22a^2b^2-26ab^3+24b^4$	$2a^2-3ab+4b^2$
	$-2a^4+4a^3b-12a^2b^2$	
	$-3a^3b+10a^2b^2-26ab^3+24b^4$	
	$+3a^3b-\ 6a^2b^2+18ab^3$	
	$4a^2b^2-8ab^3+24b^4$	
	$-4a^2b^2+8ab^3-24b^4$	
	$\cdot$	

Divis.

Div.	Dividend.	Quotient
$x-3$	x^5-243	$x^4+3x^3+9x^2+27x+81$
	$-x^5+3x^4$	

$$\begin{array}{r}
3x^4-243 \\
-3x^4+9x^3 \\
\hline
9x^3-243 \\
-9x^3+27x^2 \\
\hline
27x^2-243 \\
-27x^2+81x \\
\hline
81x-243 \\
-81x+243 \\
\hline
0
\end{array}$$

Dritter Abschnitt.

Von den Brüchen.

§. 24.

Ein Bruch ist ein gewisser Theil eines Ganzen: z. Ex. es soll a durch b getheilt werden; so wird der Quotieet $\frac{a}{b}$ angedeutet, welche Schreibart man einen Bruch nennt, wovon die obere Größe der Zähler, die untere aber der Nenner heißt.

§. 25.

Alle Brüche, in welchen der Zähler größer ist als der Nenner, heißen unächte Brüche: hingegen alle Brüche, deren Zähler kleiner ist als der Nenner, nennt man ächte Brüche.

§. 26.

Je größer der Nenner wird, desto kleiner wird der Bruch; und obgleich der Nenner noch so groß angenommen wird, so verschwindet der Bruch doch niemals ganz, oder wird niemals zu nichts.

§. 27.

Wird der Nenner eines Bruchs so weit vergrößert, daß er sich über alle Begriffe der mensch-

menschlichen Einsicht erstreckt, so sagt man, der Bruch sey unendlich groß: welches Wort unendlich so viel bedeutet, daß man mit dem gemeldten Bruch niemals zu Ende komme. Das Zeichen ∞ zeigt eine unendlich große Zahl an: und dieser Begriff vom Unendlichen ist desto sorgfältiger zu bemerken, weil er in der Folge von der größten Wichtigkeit ist.

Von der Addition und Subtraction der Brüche.

§. 28.

Haben die Brüche einerley Nennen, so hat die Addition, ingleichem die Subtraction derselben ganz und gar keine Schwierigkeit, und es mögen so viele Brüche vorhanden seyn, als immer wollen, so werden dieselbe blos durch das Zeichen + zusammengezählt. Z. Ex.

$$\frac{a}{b} + \frac{2c}{b} + \frac{3d}{b} = \frac{a + 2c + 3d}{b}$$

§. 29.

Sind aber die Nenner ungleich, so müssen die Brüche in andere verwandelt werden, deren Nenner einander gleich sind. Auf die allgemeine Art wird dieses folgendermassen verrichtet. Es seyen zum Exempel die vorgegebenen

benen Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Man multiplicire nämlich den ersten Bruch oben und unten, oder welches einerley ist, den Zähler und Nenner des ersten Bruches, mit dem Nenner des andern Bruches d, so heißt der neue Brucht $\frac{ad}{bd}$, welcher Bruch eben so groß als $\frac{a}{b}$ ist. Hierauf multiplicire man den Zähler und Nenner des andern gegebenen Bruches mit b, so erhält man $\frac{bc}{bd}$, welcher eben so groß als $\frac{c}{d}$ ist, und folglich sind die beyden Brüche unter einerley Benennung gebracht. Sollen diese beyden Brüche zusammen addirt werden, so ist ihre Summe $\frac{ad+bc}{bd}$: und der Unterschied, wenn dieselben von einander sollen subtrahirt werden, ist $\frac{ad - bc.}{bd.}$

Von der Multiplication und Division der Brüche.

§. 30.

Sollen Brüche mit ganzen Zahlen oder Größen multiplicirt werden, so wird blos der Zähler des Bruches mit der gegebenen Größe

multiplicirt, und der Nenner bleibt unverändert. Z. Ex. Es soll der Bruch $\frac{a}{b}$ mit c multiplicirt werden, so ist das Produkt $\frac{ac}{b}$.

§. 31.

Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden, so darf man nur den Nenner desselben mit der gegebenen Zahl oder Größe multipliciren, und den Zähler unverändert lassen. Z. Ex. Es soll der Bruch $\frac{a}{b}$ durch c multiplicirt werden, so ist der gesuchte Quotient $\frac{a}{bc}$.

§. 32.

Bey Multiplicirung eines Bruches mit einem andern Bruch ist weiter nichts zu beobachten, als daß man erstlich die Zähler, und hernach die Nenner mit einander multiplicirt. Z. Ex. Es soll der Bruch $\frac{a}{b}$ mit dem Bruch $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden; so ist das gesuchte Produkt $\frac{ac}{bd}$.

§. 33.

§. 33.

Bey Dividirung eines Bruches in einen andern geschieht die Division blos in dem Zähler, wenn die Brüche gleiche Nenner haben. Haben aber die Brüche ungleiche Nenner, so multiplicire man den Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors, so giebt jenes Produkt den Zähler, und dieses den Nenner zum Quotienten. Z. Ex. Man soll den Bruch $\frac{a}{b}$ durch den Bruch $\frac{c}{d}$ dividiren, so ist $\frac{ad}{bc}$ der Quotient.

§. 34.

Eben diese Regel für die Division kann noch bequemer eingerichtet werden. Man kehre nämlich den Bruch, mit dem dividirt werden soll, um, so daß desselben Nenner oben, und dessen Zähler unten steht. Alsdenn multiplicire man mit diesem umgekehrten Bruch den gegebenen Bruch, in welchen dividirt werden soll, so erhält man den Quotienten. Z. Ex. Man soll $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren, so ist $\frac{d}{c}$ der umgekehrte Bruch; dieser mit $\frac{a}{b}$ multiplicirt, giebt zum Produkt $\frac{ad}{bc}$, welches der gesuchte Quotient ist.

Vierter Abschnitt.

Von den Quadratzahlen, von Ausziehung der Wurzeln, und von den Irrational-Größen.

§. 35.

Eine jede Größe in sich multiplicirt giebt zum Produkt ein Quadrat, oder die andere Potestät oder Potenz, oder auch Dignität. Die Größe, daraus das Quadrat entstanden, wird die Quadratwurzel genannt. Z. Ex. *a* mit *a* multiplicirt, giebt zum Produkt *a a*, oder das Quadrat, und *a* ist die Quadratwurzel.

§. 36.

Multiplicire man die andere Potenz mit der Wurzel, so giebt das Produkt die dritte Potenz oder Cubus. Multiplicirt man die dritte Potenz wieder mit der Wurzel, so kommt die vierte Potenz oder Dignität heraus, u. s. w.

§. 37.

Der Grad der Potestät oder Potenz oder Dignität einer Größe wird durch eine kleine Ziffer, wenn dieselbe bestimmt angegeben ist; im Gegentheil, wenn dieselbe nicht bestimmt ist, durch einen kleinen Buchstaben oberhalb zur rechten Hand an diejenige Buchstaben gesetzt mit welchen die Größen benennt sind. Z. Ex. Die zweyte, dritte, vierte ꝛc. Dignität oder

auch

auch *n* Dignität wird angedeutet, a^2, a^3, a^4, a^n. Diese Zahlen nennt man die Exponenten der Dignitäten.

§. 38.

Sowohl bey der Addition als auch bey der Subtraction werder verschiedene Potestäten nur mit dem Zeichen + und — verbunden. Z. E. So ist $a^3 + a^2$ die Summe von der dritten und zweyten Potestät der Größe *a*; und $a^5 - a^4$ ist der Unterschied oder der Rest, wenn von der fünften Potestät die vierte Potestät subtrahirt wird; beydes kann aber nicht kürzer ausgedrückt werden. Kommen aber gleiche Potestäten vor, so ergiebt es sich von selbst, daß für $a^3 + a^3$ die Summe $2a^3$ geschrieben werden muß.

§. 39.

Will man eine Dignität durch eine andere Dignität von eben der Wurzel multipliciren, so darf man nur ihre Exponenten zusammen addiren. Z. Ex. Es soll a^2 mit a^3 multiplicirt werden, so ist das Produkt $a^{2+3} = a^5$, a^n mit $a^m = a^{n+m}$.

§. 40.

Soll man eine Dignität mit einer andern Dignität dividiren, so darf man blos ihre Exponenten von einander subtrahiren. Z. Ex.

$$a^6 : a^2 = a^{6-2} = a^4$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

§. 41.

Soll die Dignität einer Größe zu einer andern Dignität erhoben werden, so multiplicire man den Exponenten der ersten mit dem Exponenten der andern. Z. E. Man soll a^2 zur vierten Dignität erheben; so multiplicire man 2 mit 4, so ist a^8 die gesuchte Dignität; oder x^m zu n, so $x^{m.n}$ die gesuchte Dignität.

§. 42.

Die Wurzel aus einer gegebenen Dignität ausziehen, heißt, diejenige Größe finden, welche zu einer gewissen Dignität erhoben worden ist: will man aus einer gegebenen Dignität eine verlangte Wurzel ziehen, so darf man nur ihren Exponenten durch den Exponenten der Wurzel dividiren. Z. E. Die Wurzel der vierten Dignität aus x^{12} ist x^3 oder allgemein die Wurzel m aus x^n ist $^{n:m}$.

Anmerkung.

Wenn man aus einer Größe die Wurzel ausziehen soll, dergleichen sie nicht hat, so setzt man folgendes Wurzelzeichen vor dieselbe, und darüber den Exponenten der Wurzel, z. E. die Quadratwurzel von a, $\sqrt{a}$, die Cubicwurzel von $a \sqrt[3]{a}$, der sechsten Dignität von $a \sqrt[6]{a}$ u. s. w.

§. 43.

Irrational-Größen sind solche, welche keine Quadrate sind, und aus welchen also die Quadratwurzel nicht gezogen werden kann. Z. Ex. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$.

§. 44.

Die Irrational-Größen haben entweder einerley Benennung oder nicht. Ist letzteres, so müssen die Irrational-Größen von verschiedener Benennung zu einerley Benennung gebracht werden. Dieses geschieht, wenn man die Exponenten unter einerley Benennung bringt, und die dadurch gefundenen Brüche in die Stelle der Exponenten schreibt. Z. E. Es seyen $x^{n:m}$ und $y^{r:s}$ die gegebenen Irrational-Größen; so ist $x^{n:m} + y^{r:s} = x^{ns:ms} + y^{mr:ms}$ $= \sqrt[ms]{x^{ns}} + \sqrt[ms]{y^{mr}}$.

§. 45.

Wenn zwey, drey, auch mehrere Irrational-Formeln zusammen addirt werden sollen, so setze man alle Glieder mit ihren Zeichen zusammen. Z. E. Zu $\sqrt{a}$ soll $\sqrt{a}$ addirt werden, so ist die Summe $\sqrt{a} + \sqrt{a}$ oder abgekürzt $2\sqrt{a}$.

§. 46.

Bey der Subtraction der Irrational-Größen ist die Berechnung gar nicht schwer, indem man nur die Zeichen der untern Größe verkehrt lesen darf. Z. E.

$$\begin{array}{r} 4 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{6} \\ 1 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{6} \\ \hline 3 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{6} \end{array}$$

§. 47.

Die Multiplication einer Irrational-Größe $\sqrt[m]{a^n}$ mit einer andern $\sqrt[m]{b^r}$ von einerley Art geschieht, wenn man

1) die Größe unter dem Wurzelzeichen (a^n und b^r) durch einander multiplicirt, und

2) das Produkt vor das Wurzelzeichen mit seinen Exponenten setzt, so ist

3) das Produkt $\sqrt[m]{a^n\, b^r}$.

§. 48.

Soll eine Irrational-Größe $\sqrt[m]{a}$ durch eine andere $\sqrt[m]{b}$ dividirt werden, so darf man solche nur als einen Bruch ansetzen. Z. E.

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Fünf-

Fünfter Abschnitt.

Von den Proportionen und Progreßionen.

§. 49.

Entweder sind zwey Größen einander gleich, oder sie sind einander ungleich. Wenn im letzten Fall die eine Größe größer ist als die andere Größe, und man soll ihre Ungleichheit bestimmen, so kann dieses auf zweyerley Art geschehen: denn einmal fragt man: um wie viel die eine Größe größer sey, als die andere Größe; oder zweytens fragt man, um wie vielmal die eine Größe größer sey, als die andere Größe. Beyderley Bestimmung heißt ein Verhältniß; und zwar im ersten Fall ein arithmetisches, im andern Fall hingegen ein geometrisches Verhältniß.

§. 50.

Der Unterschied zwischen zwey gegebenen Größen wird durch das arithmetische Verhältniß bestimmt. Hieraus folgt nun, daß hierzu drey Stücke erfordert werden: nämlich erstens, die größere, zweytens, die kleinere Größe, und drittens, der Unterschied.

§. 51.

Ist a die größere, b die kleinere Größe, und d der Unterschied, so findet man d, wenn man von a das b abzieht, folglich ist $d = a - b$.

§. 52.

Ist die kleinere Größe b nebst dem Unterschied d gegeben, und man soll die größere Größe a finden, so addire man d zu b, so ist $a = b + d$.

§. 53.

Um die kleinere Größe b zu finden, so subtrahire man von der größern Größe a den Unterschied d, so ist $b = a - d$.

§. 54.

Addirt oder subtrahirt man zu den beyden gegebenen Größen eine beliebige Zahl, so bleibt der Uuterschied der nämliche. Z. E.

$(a+c) - (b+c) = d$, $(a-c) - (b-c) = d$.

§. 55.

Werden aber die beyden gegebenen Größen durch oder mit einer beliebigen Zahl multiplicirt, so wird auch der Unterschied um so vielmal größer, als die Größen vervielfältiget worden sind. Z. E.

$a - b = d$, $2a - 2b = 2d$ oder $na - nb = nd$.

§. 56.

Vier Größen, die so beschaffen sind, daß zwischen der ersten und zweyten einerley Unterschied, wie zwischen der 'dritten und vierten Größe ist, so machen dieselbe eine arithmetische Proportion aus.

§. 57.

Eine ståte (continua) Proportion ist eine solche, in welcher das zweyte Glied zweymal vorkommt, so, daß es zugleich das Antecedens der ersten Verhåltniß, und das Consequens der zweyten ist. Z. E.

$$a \pm b = b \pm c.$$

§. 58.

In einer jeden arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden åußern Glieder der Summe der beyden mittlern gleich: oder welches einerley ist; die Summe des ersten und vierten Gliedes ist immer eben so groß, als die Summe des zweyten und dritten Gliedes. Z. E. Es sey a das erste, b das zweyte, c das dritte und d das vierte Glied, so ist die Proportion:

$$a + b = c + d, \quad \text{folglich}$$
$$a + d = b + c.$$

§. 59.

In einer ståten arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden åußern Glieder dem zweymal genommenen mittlern Gliede gleich. Z. E. Es seyen a und c die åußern Glieder, und b das mittlere, so ist

$$a + b = b + c, \quad \text{oder}$$
$$a + c = 2b.$$

§. 60.

Es sind in einer arithmetischen Proportion drey Glieder gegeben, wie kann man das vierte Glied finden?

Auflösung.

Es seyen die drey ersten Glieder a, b, c gegeben, man soll daraus das vierte d finden, so ist dasselbe $d = b + c - a$, das ist, man addire das zweyte und dritte, und von der Summe ziehe man das erste ab, so giebt der Rest das vierte Glied.

2) Es sey das erste a, das zweyte b und das vierte Glied d gegeben, man soll das dritte c finden, so ist dasselbe $c = a + d - b$, das ist, das dritte Glied ist gleich der Summe der beyden äußern Glieder weniger dem zweyten Gliede.

3) Es sey das zweyte Glied b, das dritte c und das vierte d gegeben, wie groß ist das erste a? $a = b + c - d$, das ist, die Summe der beyden mittlern Glieder, weniger dem letzten ist das erste Glied.

4) Es sey das Glied a, das dritte c und das vierte d gegeben, so ist das zweyte $b = c - d + a$, das ist, zu dem Unterschied zwischen dem dritten und vierten das erste Glied addirt, giebt das zweyte b.

§. 61.

In einer ståten arithmetischen Proportion sind die beyden åußern Glieder gegeben, wie kann man das mittlere finden?

Auflösung.

Man addire das erste und letzte Glied, und die Summe dividire man durch 2, so ist der Quotient das verlangte mittlere Glied. Z. E. Es sey das erste Glied a, das letzte Glied c; so ist nach §. 51. die Summe $a + c = 2b$, folglich $1b$ das mittlere Glied.

§. 62.

Ist in einer ståten arithmetischen Proportion eines von den åußern nebst dem mittlern gegeben, wie findet man das andere åußere?

Auflösung.

Es sey a das erste Glied, und b das mittlere; so dupplire man das mittlere, und von dem Produkt ziehe man das gegebene åußere ab, so giebt der Rest das andere åußere, und so wird c das andere åußere gesuchte Glied seyn $= c = 2b - a$.

§. 63.

Eine Reihe der Größen, welche immer um gleichviel wåchst, oder abnimmt, es mag

die-

dieselbe aus soviel Gliedern bestehen, als sie immer will, nennt man eine arithmetische Progression.

§. 64.

Diejenige Größe, um welche die Glieder einer arithmetischen Progression größer oder kleiner werden, heißt man die Differenz oder Unterschied. Wenn also das erste Glied $= a$, und die Differenz $= d$, so wird die arithmetische Progression so zu stehen kommen: als:

$$a.\quad a \pm d.\quad a \pm 2d.\quad a \pm 3d.\quad a \pm 4d.$$

u. s. w.

Das Zeichen + gilt für die aufsteigende, und das Zeichen — für die niedersteigende Progression.

§. 65.

Hieraus ergiebt sich ganz klar und deutlich, daß man ein jegliches Glied einer arithmetischen Progression finden könne, ohne daß man nöthig hat, die vorhergehenden Glieder zu wissen, und dieses blos aus dem ersten Gliede a und der Differenz d. Z. Ex. Das fünfte Glied ist nach §. 64. $= a + 4d$; folglich wird das n^{te} Glied seyn $a + (n - 1)d$. Aus diesem folgt, daß, wenn das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$ gegeben, man das letzte Glied z finden kann, indem man die Differenz mit der Anzahl der Glieder weniger 1 multiplicirt, und

zu dem Produkt das erste Glied addirt: also ist das letzte Glied $z = a + (n - 1) d$.

§. 66.

Ist in einer arithmetischen Progression das erste Glied $= a$, das letzte $= z$, und die Anzahl der Glieder $= n$ bekannt, so findet man daraus die Differenz $= d$, wenn man von dem letzten Gliede z das erste a abzieht, und den Rest durch die Anzahl der Glieder weniger $1 = n - 1$ dividirt; folglich ist $d = \frac{z - a}{n - 1}$.

§. 67.

Ist das erste Glied $= a$, das letzte $= z$, und die Differenz $= d$ gegeben, und man soll daraus die Anzahl der Glieder $= n$ suchen; so findet man dieselbe, wenn man das erste Glied abzieht; den gefundenen Rest durch die Differenz dividirt, und zu dem Quotienten 1 addirt, folglich ist $n = \frac{z - a}{d} + 1$.

§. 68.

Wenn aber das letzte Glied $= z$ die Differenz $= d$ und die Anzahl der Glieder $= n$ bekannt sind; so wird das erste Glied $= a$ gefunden, wenn man die Anzahl der Glieder weniger $1 = n - 1$ mit der Differenz $= d$ multiplicirt, und von dem Produkt das letzte Glied $= z$ abzieht, folglich ist $a = z - (n - 1) d$.

§. 69.

§. 69.

In einer jeden arithmetischen Progression ist die Summe der äußersten Glieder der Summe je zweyer darzwischen liegenden Glieder gleich, wenn solche gleich weit von den äußersten entfernt sind.

Beweis. In der arithmetischen Progression §. 56. ist a das erste Glied, und $a + 4d$ das fünfte Glied und die Summe ist $= 2a + 4d$. Nimmt man nun das zweyte Glied $= a + d$, und das vorletzte Glied $= a + 3d$, so ist die Summe ebenfalls $= 2a + 4d$. Besteht die Progression aus einer ungeraden Anzahl, so ist die Summe der beyden äußersten Glieder dem doppelten mittlern Gliede gleich. In eben diesem Exempel ist die Summe der beyden äußersten $= 2a + 4d$, und das mittlere oder dritte Glied ist $= a + 2d$. Nimmt man dieses gedoppelt, so ist das Produkt $= 2a + 4d$; folglich der Summe den beyden äußersten Gliedern gleich: und dieses war zu beweisen.

§. 70.

Wenn man obiger Progression ihre Summe finden will, so darf man nur eben diese Progression rückwärts darunter schreiben, und Glied vor Glied addiren, wie folgt:

$$\begin{array}{l} a + a + d + a + 2d + a + 3d + a + 4d \\ \underline{a + 4d + a + 3d + a + 2d + a + d + a -} \\ 2a + 4d + 2a + 4d + 2a + 4d + 2a + 4d + 2a + 4d \end{array}$$

so

so ist diese gefundene und aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe zweymal so groß, als die Summe der Progression. Da nun die Anzahl der Glieder $= n$, so ist die Summe $s = n.2a + 4d = s$. Weil nun diese Summe zweymal so groß ist, als die Summe der arithmethischen Progression, so ist die wahre Summe

$$= \frac{n.2a - 4d}{2} = s.$$

Weil nach §. 65. $a + (n - 1)\,d = z$; so muß folglich $2a + 4d = a + z$ seyn, und hieraus folgt denn ganz natürlich, daß $\frac{n.2a + 4d}{2} = n\frac{(a + z)}{2} = s$. ergiebt sich die leichte Regel für die Summation einer jeglichen arithmetischen Progression.

Man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder, so giebt die Hälfte des Produkts die Summe der ganzen Progression.

Oder

man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder.

Oder endlich

man multiplicire die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes mit der ganzen Anzahl der Glieder.

§. 71.

Die Anwendig obiger Formeln durch einige praktische Aufgaben zu erläutern, ist um so nöthiger, weil dadurch der Vortheil, den dieselben leisten, um so deutlicher in die Augen fällt.

Erste Aufgabe.

Wie viel Schuh wird ein Körper in der 60sten Secunde fallen, wenn derselbe in der ersten Minute 15, in der zweyten 45, in der dritten 75 Schuh u. s. w. fällt.

Es sey das erste Glied $a = 15$
die Differenz $d = 30$
die Anzahl der Glieder $n = 60$
so ist das letzte Glied $z = a + (n - 1)\,d$;
folglich $15\ (60 - 1)\ 30 = 1785$ Schuh.

Zweyte Aufgabe.

Wie weit wird ein Körper in einer Minute, oder welches einerley ist, in 60 Secunden fallen, wenn derselbe in der ersten Minute 15, in der zweyten 45, in der dritten 75 Schuh u. s. w. fällt? Nach der vorhergehenden Aufgabe ist das erste Glied $a = 15.$, die Differenz $d = 30$, das letzte Glied $z = 1785$, und die Anzahl der Glieder $n = 60$. Da nun die Summe $s = \frac{n(a + z)}{2}$, so ist $\frac{(15 + 1785)\,60}{2}$ $= 54000$ Schuh.

Dritte

Dritte Aufgabe.

Einer kauft ein Pferd mit der Bedingung: für den ersten Hufnagel zahlt er 15 kr., für den zweyten 21 kr., für den dritten 27 kr. und immer 6 kr. mehr für jeden folgenden. In allem sind aber 32 Nägel; wie hoch kömmt das Pferd zu stehen?

Da das erste Glied $a = 15$ kr.
die Differenz $d = 6$ kr.
die Anzahl der Glieder $n = 32$ kr.
so ist nach §. 65. das letzte Glied $z = a + (n - 1) d = 15 + (32 - 1) 6 = 201$. Hieraus ergiebt sich die gesuchte Summe $s = \frac{n(a+z)}{2} = \frac{32(15+201)}{2} = 3456$.
Folglich kommt das Pferd 3456 Kreuzer oder 57 fl. 36 kr. zu stehen.

Vierte Aufgabe.

Ein Bauersweib verkauft Aepfel auf dem Markt an verschiedene Käufer. Dem ersten giebt sie 2, dem andern 5, dem dritten 8 u. s. w. und immer dem folgenden 3 mehr als den vorhergehenden, bis endlich der letzte 23 Aepfel bekommt. Nun fragt es sich, wie viel sind Käufer gewesen, und wie viel Aepfel sie verkauft habe? Vermöge dieser Aufgabe soll also die Anzahl der Glieder, und die Summe der Progression gefunden werden.

Da das erste Glied $a = 2$
die Differenz $d = 3$
und das letzte Glied $z = 23$,

so ist nach §. 67 $n = \frac{z-a}{d} + 1 = \frac{23-2}{3} + 1$
$= 8 = n$, oder die Anzahl der Käufer. Die Summe der Progression $s = n\,(a+z) = 8\,\frac{(2+23)}{2} = 100 = s$.

Fünfte Aufgabe.

Eine Person begegnet 8 Bettlern, und giebt dem ersten 2 Kreuzer, dem andern etliche Kreuzer mehr, desgleichen den übrigen, so, daß er einem jeden mehr als dem andern gegeben bis auf den letzten, welcher 30 Kreuzer bekommen hat. Nun fragt sich, wie viel der andere mehr als der erste erhalten hat; und wie viel Kreuzer ausgegeben worden sind?

Vermöge dieser Aufgabe soll man den Unterschied nebst der Summe der arithmetischen Progression bestimmen.

Nach §. 66. ist die Differenz $d = \frac{z-a}{n-1}$.

Es sey das erste Glied $a = 2$
das letzte : : : $z = 30$
die Anzahl der Glieder $n = 8$;

so ist $\frac{30-2}{8-1} = 4$ die Differenz

und die Summe $s = 8\,\frac{(2+30)}{2} = 128$

oder fl. 2. — 8 kr.

Sechs=

Sechste Aufgabe.

Ein Brunn hat 12 Wasserröhren, aus der andern fließen in einer Stunde 2 Eymer Wasser mehr als aus der ersten; aus der dritten mehr als aus der zweyten u. s. w. so, daß immerfort die folgende Röhren zwey Eymer Wasser mehr ausgießen, als die vorhergehende: aus allen Röhren aber zusammen fließen 180 Eymer. Nun fragt es sich, wie viel Wasser aus einer jeden Röhre in einer Stunde fließen könne?

Aus dieser Aufgabe erhellet, daß man aus dem gegebenen Unterschiede der Anzahl der Glieder und der Summe der arithmetischen Progression das erste und letzte Glied finden soll.

Es sey der Unterschied $d = 2$
die Anzahl der Glieder $n = 12$
und die Summe $s = 180$.

Weil $s = n \frac{(a+z)}{2}$; so darf man nur

$s = 180$ durch $\frac{n}{2}$; so giebt der Quotient die

Summe von $a + z = 30$ an. Weil die Summe der beyden äußersten Glieder das erste Glied zweymal nebst dem Unterschiede multiplicirt mit der Anzahl der Glieder weniger eins enthält; so multiplicire man die Differenz $d = 2$ durch die Anzahl der Glieder $n = 12$ weniger 1:

also $n - 1 = 11$, und das Produkt 22 ziehe man von der gefundenen Summe $a + z = 30$ ab, so bleibt 8 das erste Glied zweymal genommen übrig. Halbirt man diese 8, so ist der Quotient $4 =$ dem ersten Gliede a. Da nun das erste Glied $a = 4$, so läßt sich nach §. 65. das letzte z finden, indem $z = a + (n - 1) d$, folglich $z = 4 (12 - 1) 2 = 26$.

§. 72.

Das geometrische Verhältniß zwischen zwey gegebenen Größen giebt die Antwort auf die Frage: um wie vielmal die eine Größe größer sey als die andere Größe, an; und wird gefunden, wenn man die eine durch die andere dividirt.

§. 73.

Bey einem geometrischen Verhältniß kommen drey Stücke zu beobachten vor. Erstens: die erste der beyden gegebenen Größen, welche der Vordersatz heißt; zweytens: die andere derselben, welcher der Nachsatz heißt, und drittens: die Benennung des Verhältnisses, welche man durch die Division des Vordersatzes in den Nachsatz findet.

§. 74.

Sind zwey geometrische Verhältnisse einander gleich, so wird die Gleichheit derselben eine

geome-

geometrische Proportion genannt. Man schreibt dergleichen geometrische Proportion $a : b = c : d$, und wird ausgesprochen; wie sich verhält a zu b, so verhält sich auch c zu d.

§. 75.

Eine geometrische Proportion hat vier Glieder, welche die Eigenschaft haben müssen, daß, wenn man das erste durch das zweyte dividirt, es eben soviel ist, als ob man das dritte durch das vierte dividirt.

§. 76.

Hieraus folgt diese Haupteigenschaft, daß das Produkt aus dem ersten und vierten Glied eben so groß ist, als das Produkt aus dem zweyten und dritten; oder daß das Produkt der beyden äußern Glieder gleich ist dem Produkt der beyden mittleren Gliedern. Z. Ex. Es sey die geometrische Proportion $a : b = c : d$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Multiplicire man jeden dieser Brüche mit b, so bekommt man $a = \frac{bc}{d}$. Multiplicirt man ferner beyderseits mit d, so bekommt man $ad = bc$. Nun ist aber ad das Produkt der äußern Glieder, und bc das Produkt der mittleren Glieder, welche beyde Produkte folglich einander gleich sind.

§. 77.

Weil in einer geometrischen Proportion das Produkt der äußern Glieder dem Produkt der mittleren Glieder gleich ist, so kann man daraus leicht das vierte Glied finden, wenn die drey ersten Glieder gegeben sind. Z. E. Es seyen die drey ersten Glieder a, b und c bekannt, $a : b = c$, und für das vierte unbekannte Glied setze man d. Da nun $ad = bc$ seyn muß, so dividire man beyderseits durch a, so bekommt man $d = \frac{bc}{a}$; folglich ist das vierte Glied $= \frac{bc}{a}$, welches herauskommt, wenn man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt, und das herausgekommene Produkt durch das erste dividirt.

§. 78.

Die Glieder einer jeglichen geometrischen Proportion können auf verschiedene Art versetzt werden, ohne die Proportion dadurch aufzuheben.

Beweis. Die Proportion bleibt, so lange das Produkt der äußern Glieder dem Produkte der mittleren Glieder gleich bleibt: folglich

$a : b =$

$a:b=c:d.$	$ad=bc.$
$a:c=b:d.$	$ad=bc.$
$b:a=d:c.$	$ad=bc.$
$b:d=a:c.$	$ad=bc.$
$c:a=d:b.$	$ad=bc.$
$c:d=a:b.$	$ad=bc.$
$d:b=c:a.$	$ad=bc.$
$a+b:b=c+d:d.$	$ad=bc.$
$a:a+b=c:c+d.$	$ad=bc.$
$a-b:b=c-d:d.$	$ad=bc.$
$a:a-a=c:c-d.$	$ad=bc.$

Denn es ist immer das Produkt der äußern dem Produkte der mittlern gleich.

§. 79.

Wenn man die Glieder einer geometrischen Proportion der Ordnung nach durch die Glieder einer andern Proportion multiplicirt, so bleibt immer unter den Produkten eine Proportion..

Beweis. Es seyen die zwey Proportionen:

$$a:aq=b:bq$$
$$c:cp=d:dp$$

Multiplicirt man die Glieder der ersten Proportion mit den Gliedern der andern Proportion, so entsteht:

$$ac:acpq=db:dbpq$$

welches ebenfalls eine geometrische Proportion ist, weil beyderseits der nämliche Quotient, nämlich pq ist.

Der Beweis für die Diviſion iſt der nämliche:

Es ſey $\begin{cases} ac : acpq = bd : bdpq \\ c : cp = d : dp \end{cases}$

Dividirt man die Glieder der erſten Proportion durch die Glieder der zweyten Proportion, ſo entſteht: $a : aq = b : bq$.

Hieraus folgt, daß gleiche Potenzen, wie auch gleiche Wurzeln ſolcher Größen, die eine Proportion ausmachen, gleichfalls proportional ſind.

§. 80.

Wenn mehrere gleiche Verhältniſſe ſind, ſo wird die Summe aller Vorderſätze zur Summe aller Nachſätze ſich verhalten, wie was immer für ein Vorderſatz zu ſeinem Nachſatz.

Beweis. Die gleichen Verhältniſſe ſind: $a : aq$, und $b : bq$; imgleichen $c : cq$ und $d : dq$.

Die Summe alle Vorderſätze iſt $a+b+c+d$,

Die Summe aller Nachſätze $\overline{a+b+c+d}\times q$.

Nun aber verhalten ſich dieſe zwey Summen gegen einander, wie $a : aq$, weil beyderſeits der nämliche Quotient q ſtatt findet.

§. 81.

Es sind drey Glieder einer geometrischen Proportion gegeben, wie findet man das vierte Glied?

Auflösung.

Geht eines der äußern Glieder ab, so multiplicire man die beyden mittlere, das Produkt dividire man durch das gegebene äußere Glied.

Ist aber eines von den mittleren Gliedern zu suchen, so multiplicire man die beyden äußern Glieder, dividire das herausgekommene Produkt durch das gegebene mittlere Glied, so ist der Quotient das gesuchte mittlere Glied.

Zum Exempel.

Es sey *a* das erste Glied,
b das zweyte, und
c das dritte Glied;
so ist im ersten Fall die Proportion

$$a : b = c : \frac{bc}{a}$$

Es sey a das erste Glied,
c das dritte, und
d das vierte Glied;
so ist im zweyten Fall die Proportion

$$a : \frac{ad}{c} = c : d.$$

§. 82.

Es sind zwey Glieder einer stäten geometrischen Proportion gegeben, wie findet man das dritte?

Auflösung.

1) Soll das mittlere Glied gesucht werden, so multiplicire man die beyden äußern Gliedern, und aus dem Produkt ziehe man die Quadratwurzel, so ist alsdenn solche das verlangte Glied.

2) Soll aber eines von den äußern Gliedern gesucht werden, so verwandle man das mittlere Glied in ein Quadrat; und dividire alsdenn solches durch das gegebene äußere Glied, so giebt der Quotient das verlangte äußere Glied.

Zum Exempel.

Es ist im ersten Fall a das erste, und
c das dritte Glied;
so ist die Proportion $a : \sqrt{ac} = \sqrt{ac} : c.$

Es

Es sey im zweyten Fall a das erste, und
b das mittlere Glied

so ist die Proportion $a : b = b : \frac{b^2}{a}$.

§. 83.

Eine Reihe Größen, welche immer um gleich viel wächst oder abnimmt, heißt eine geometrische Progression. Diejenige Größe, welche angiebt, um wie vielmal ein jedes Glied größer ist als das vorhergehende Glied, wird der Nenner genennt.

Eine jede geometrische Progression kann auf folgende Art ausgedrückt werden:

$a. \; aq. \; aq^2. \; aq^3. \; aq^4. \; aq^5.$ u. s. w.

§. 84.

Ein jedes Glied einer geometrischen Progression ist gleich dem Produkt aus dem ersten Gliede, und aus den Exponenten zu jener Potenz erhoben, welche die Zahl der vorhergehenden Glieder anzeigt.

Beweis. Der Exponent fängt an ein Faktor zu seyn im zweyten Gliede, und er steigt in jedem Gliede um einen Grad.

Hieraus folgt: die Potenzen von einer jeglichen Größe machen eine geometrische Progression.

gression aus. Denn setzt man $a = 1$; so erhält man in der allgemeinen Formel:

$$1.\ q.\ q^2.\ q^3.\ q^4.\ q^5.\ \text{u. s. w.}$$

Ganz anders aber verhält sich die Sache bey den Wurzeln einer Größe.

§. 85.

In allen geometrischen Progressionen ist das Produkt der zwey äußersten Glieder gleich dem Produkt aus was immer für zweyen andern Gliedern, die von dem äußersten gleich weit abstehen.

Der Beweis hievon ist klar, wenn man nur die allgemeine Formel $a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3.\ aq^4.\ aq^5.\ aq^6.$ u. s. w. betrachtet; denn das Produkt der äußern Glieder $a \times aq^6 = a^2q^6$ das Produkt des zweyten und vorletzten Gliedes ist $aq \times aq^5 = a^2q^6$ u. s. w.

§. 86.

In einer jeden geometrischen Progression verhält sich das erste Glied zum dritten, wie das Quadrat des ersten zum Quadrat des zweyten: das erste zum vierten, wie der Cubus des ersten zum Cubus des zweyten u. s. w.

Der

Der Beweis liegt in der allgemeinen Formel. Denn $a : aq^2 = a^2 : a^2 q^2$. Eben so auch $a : aq^3 = a^3 q^3$.

§. 87.

In einer jeden geometrischen Progreſſion verhält ſich die Summe aller Glieder, das letzte ausgenommen, zur Summe aller Glieder, das erſte ausgenommen, wie das erſte zum zweyten.

Beweis. Die Summe aller Vorderſätze verhält ſich zu der Summe aller Nachſätze, wie ein jeder Vorderſatz zu ſeinem Nachſatz. §. 80. Es ſind aber in einer geometriſchen Proportion alle Glieder ein Vorderſatz, das letzte ausgenommen, folglich ſind auch alle ein Nachſatz, das erſte ausgenommen. Mithin verhält ſich die Summe aller Glieder, das letzte ausgenommen, zur Summe aller Glieder, das erſte ausgenommen, wie das erſte Glied zum zweyten Gliede.

Anmerkung.

Es ließen ſich, wie bey der arithmetiſchen Progreſſion, ſehr viele Formeln zur Auflöſung der Aufgaben einer geometriſchen Progreſſion berechnen. Da aber die Berechnung eines Theils ſehr ſchwer iſt, und andern Theils nicht ſo häufig vorkommt, ſo iſt es genug, wenn man folgende aus den vorgenannten

Grund=

Grundsätzen fließende und öfters vorkommende Aufgaben sich merkt.

§. 88.

Das erste Glied, der Quotient und die Anzahl der Glieder einer geometrischen Progression sind gegeben, wie findet man das vierte?

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$
das letzte : : : $= z$
der Quotient $= q$
die Anzahl der Glieder $= n$;

so folgt aus den vorhergehenden Grundsätzen folgende Formel:

$$z = a q^{n-1}.$$

das heißt, um das letzte Glied zu bekommen, erhebe man den Quotienten zu jener Potenz, welche die Anzahl der Glieder weniger 1 anzeigt, und mit dieser Potenz multiplicire man das erste Glied. Will man aber, wenn n eine sehr große Zahl ist, und die Erhebung zu einer sehr hohen Potenz sehr beschwerlich ist, die Rechnung abkürzen, so merke man sich folgendes: Soll eine Größe zu einer Potenz erhoben werden, so theile man den Exponenten dieser Potenz in zwey, drey und mehrere Theile, und erhebe die gegebene Größe zu den durch diese Theile angezeigten Potenzen, und multi-

multiplicire diese durch einander, so ist das Produkt die verlangte Potenz.

Zum Exempel.

Soll eine Größe zur siebenten Potenz erhoben werden: so erhebe man sie zur dritten und vierten Potenz, und multiplicire solche durch einander, so ist das Produkt die siebente Potenz.

Exempel.

Gesetzt, ein Körnlein Getreid trage in einem Jahre nur fünf Körnlein: säet man diese fünfe wieder aus, so bringt ein jedes derselben wieder fünf Körnlein, und so fort bis in das vierzigste. Wie viel Körnlein werden im vierzigsten Jahre wachsen?

Auflösung.

Es sey $a = 5$, $q = 5$ und $n = 40$; so ist $n - 1 = 39$. Um also den Werth von z zu finden, muß man zu Folge der Formel $z = aq^{n-1}$ die Zahl 5 zu der neun und dreyßigsten Potenz erheben, und alsdenn durch das erste Glied multipliciren. Man nehme Anfangs 5 bis zur dritten Potenz; so ist dieselbe $= 125$. Diese durch sich selbst multiplicirt giebt die sechste Potenz $= 13625$. Diese wieder durch sich selbst multiplicirt, giebt die zwölfte Po-

tenz 244140625. Multiplicirt man diese wieder durch sich selbst, so giebt 59604644775390625 die vier und zwanzigste Potenz. Multiplicirt man diese wieder mit der zwölften Potenz, so bekommt man 14551915228366851806640625 für die sechs und dreyßigste Potenz. Diese wieder mit der dritten multiplicirt, giebt für die neun und dreyßigste Potenz 1818989403-545856475830078125. Endlich diese wieder durch das erste Glied 5 multiplicirt, giebt 909494701772928237915039002 die verlangte Anzahl der Körner, welche im vierzigsten Jahre wachsen.

§. 89.

Das erste und letzte Glied einer geometrischen Progreßion nebst dem Quotienten sind gegeben, man soll die Summe der ganzen Progreßion suchen.

Auflösung.

Man multiplicire das letzte Glied durch den Quotienten, von dem Produkt zieht man das erste Glied ab, den Rest dividire man durch den Quotienten weniger 1, so ist der herausgekommene Quotient die Summe der ganzen Progreßion. Es sey die Summe $= s$; so ist also $s = \frac{zaq - a^2}{aq - a} = \frac{zq - a}{q - 1}$.

Zum

Zum Exempel.

Wie viel Getreid wächst in vierzig Jahren, wenn im ersten Jahre aus einem Körnlein 5 wachsen, diese wieder gesäet werden, und aus jedem wieder fünfe entspringen, u. s. w.

Man suche nach dem vorhergehenden §. das letzte Glied, so findet man, daß dasselbe hält, 9094947017729282379150390625 $= z$ $a = 5$ und $q = 5$.

Wenn man nun das letzte Glied z mit q, das ist, durch 5 multiplicirt, so entsteht zq $= 45474735088646411895751953125$; und zieht man $a = 5$ davon ab, so entsteht $zq - a =$ 45474735088646411895751953120. Wenn man dieses endlich durch $q - 1$, das ist, durch 4 dividirt; so entsteht

$$\frac{zq - a}{q - 1.} = 11368683772161602973937988280.$$

Sechster Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen vom ersten Grad mit einer unbekannten Größe.

§. 90.

Es sind zween Wege zu der Wahrheit zu gelangen: die Zusammensetzung (Synthesis) und die Auflösung (Analysis). Jene fängt von dem einfachsten an, und schwingt sich nach und nach, und gleichsam stuffenweise zu dem, was man zu wissen verlangt: diese nimmt jenes, was gesucht wird, als schon gefunden an: erforscht alsdenn alle Folgen, die aus dieser Voraussetzung fließen, und zieht endlich aus eben diesen Folgen die gesuchte Wahrheit heraus. Dieser zweyten Art, die Wahrheit zu entdecken, bedient man sich in Auflösung der algebraischen Aufgaben. Es müssen aber in allen Aufgaben einige Dinge bekannt, und wenigst ein Ding unbekannt seyn; denn, wenn alles bekannt wäre, so würde nichts mehr übrig seyn, nach dem man fragen könnte: wenn aber gar nichts bekannt wäre, würde die Frage unmöglich aufzulösen seyn.

Zu Auflösung der algebraischen Aufgaben bedient man sich der Gleichungen. Wie dieselbe aufzulösen sind, soll in folgenden §§. erklärt werden.

§. 91.

Eine Gleichung ist eine Vergleichung von zweyen algebraischen Ausdrücken, davon einer soviel gilt, als der andere. Sie werden miteinander durch das Zeichen = verbunden. Jene Größen, welche zur Linken dieses Gleichheits-Zeichen stehen, machen, alle zusammengenommen, das erste Glied der Gleichung: die, welche zur Rechten dieses Gleichheits-Zeichen stehen, machen das zweyte Glied der Gleichung aus: zum Exempel, in der Gleichung $3x + 3b = 3c - 5d + 2a$, die zwo ersten Größen, $3x + 3b$ machen das erste: die drey letzten $3c - 5d + 2a$ das zweyte Glied aus.

§. 92.

Jene Gleichung, in welcher nur eine unbekannte Größe ist, heißt eine bestimmte Gleichung. Wenn aber mehrere unbekannte Größen darinn vorkommen, nennt man sie eine unbestimmte Gleichung. Die Ursache dieser Benennung ist, weil jene nur eine, oder wenigst nur eine bestimmte Anzahl der Auflösungen hat, diese aber unendlich vielerley.

§. 93.

Jede Gleichung ist von jenem Grade, welchen der größte Exponent der unbekannten Größe anzeigt: also ist die Gleichung $3x + a^2 = 2b - x$ vom ersten; die Gleichung $x^2 + ax = c$ vom zweyten Grade.

§. 94.

Eine Gleichung auflösen heißt soviel, als den Werth derjenigen unbekannten Größe, die darinn vorkömmt, finden. Dieses erhält man, wenn die Gleichung also geordnet wird, daß die unbekannte Größe ganz allein auf der einen Seite des Zeichens =, auf der andern aber lauter bekannte Größen stehen.

Wie man nun dieses erhalten könne erstens, wenn die Gleichung vom ersten Grade ist, und nur eine unbekannte Größe hat: zweytens, wenn sie vom zweyten Grade ist, aber wieder nur eine unbebekannte Größe hat: und drittens, wenn mehrere unbekannte Größen darinn begriffen sind; wird im nachfolgenden Paragraphen gezeigt.

§. 95.

Ehe man noch die Regeln zu dieser Auflösung giebt, muß man jene Grundsätze anführen, auf welche sich alle diese Regeln gründen.

I. Wenn man zu gleichen Größen etwas Gleiches addirt, so werden die Summen gleich seyn.

II. Wenn man von gleichen Größen etwas Gleiches subtrahirt, so sind die Reste gleich.

III. Wenn man gleiche Größen durch gleiche Größen multiplicirt, so entstehen gleiche Produkte.

IV. Wenn man gleiche Größen durch gleiche Größen dividirt, so bekömmt man gleiche Quotienten.

V. Wenn gleiche Größen zu den nämlichen Potenzen erhöhet werden, so sind diese Potenzen gleich.

VI. Wenn aus gleichen Größen die nämliche Wurzel ausgezogen wird, so sind diese Wurzeln wieder gleich.

Alle diese Grundsätze kann man in einen zusammenziehen, und sagen: Wenn bey gleichen Größen die nämlichen Bearbeitungen vorgenommen werden, so entstehen wieder gleiche Größen. Hier folgen nun die Regeln.

Erste Regel.

§. 96.

Jeder Theil einer Gleichung kann aus einem Gliede in das andere mit Veränderung des Zeichens übertragen werden, ohne daß hiedurch die Gleichheit beyder Glieder gehoben wird.

Also wenn $x - a = b$, so sagt man, es sey auch $x = a + b$. Denn $x - a + a = b + a$ gemäß dem ersten Grundsatze: weil nun $-a$ und $+a$ einander aufheben, so folgt, daß $x = a + b$. Eben so, wenn $x + a = b$, sagt man, es sey auch $x = b - a$; denn $x + a - a$

 $= b - a$

$= b - a$ gemäß dem zweyten Grundsatze. Also ist auch nach der Abkürzung $x = b - a$.

Durch Hülfe dieser Regel kann man alle Theile einer Gleichung, in welchen die unbekannte Größe enthalten ist, auf eine Seite des Zeichens $=$, und auf die andere, alle, welche gänzlich bekannt sind, setzen.

Zum Exempel.

I.

Es sey $3x + 2a - 3b = 2x + 3b - 5b$
es wird seyn $3x - 2x = 3b - 5c - 2a + 3b$
und folglich $x = 6b - 5c - 2a$.

II.

$2x - 3ab - 5ac = x - 3ab - 4ac$
$2x - x = - 3ab - 4ac + 3ab + 5ac$
folglich $x = ac$.

III.

$3x - 9 = 2x + 6 - 14$
$3x - 2x = 6 - 14 + 9$
folglich $x = 1$.

§. 97.

Aus dieser Regel folgt, man könne in jeder Gleichung die Zeichen aller Theile verändern; denn, wenn man alle Theile aus einem Gliede in das andere übersetzen wollte, würden

den ja alle Zeichen verändert werden. Dieses hat öfters seinen Nutzen, wenn nämlich die unbekannte Größe ganz allein auf einer Seite mit dem Zeichen — steht. Also, wenn man hat $3x - a = 3x + b$, so bekommt man $3x - 4x = b + a$, oder $-x = b + a$. Wenn man nun alle Zeichen verändert, so entsteht $x = -a - b$.

§. 98.

Zweyte Regel.

Wenn ein Theil einer Gleichung durch was immer für eine Größe multiplicirt ist, so können alle übrigen Theile durch diese Größe dividirt, und dieselbe in jenem Theile, wo sie ein Factor war, weggelassen werden.

Also wenn $ax = b + c$, so sage man, es sey $x = \frac{b + c}{a}$. Denn $\frac{ax}{a} = \frac{b + c}{a}$ gemäß dem vierten Grundsatze, und folglich $x = \frac{b + c}{a}$.

Durch Hülfe dieser Regel kann man die unbekannte Größe von was immer für einem Coeficienten erledigen.

Zum Exempel.

I.

Es sey $3x - 5 = 3 - 2x$
es wird seyn $3x + 2x = 3 + 5$
das ist $5x = 8$
folglich $x = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$.

II.

Es sey $2bcx - ab = 5bc + 2bcd$
es wird seyn $2bcx = 5bc + 2bcd + ab$
das ist $x = \frac{5bc + 2bcd + ab}{2bc}$.

III.

Es sey $ax - ab = 3ad$
es wird seyn $ax = 3ad + ab$
folglich $x = \frac{3ad + ab}{a} = 3d + b$.

§. 99.

Wenn die unbekannte Größe mit verschiedenen bekannten Größen multiplicirt, sich in mehreren Theilen befindet, so muß man durch die Summe aller dieser Factoren beyde Glieder der Gleichung dividiren. Im ersten Gliede wird alsdenn die unbekannte Größe allein der Quotient seyn: das andere Glied wird ein Bruch seyn, dessen Nenner die Summe aller dieser Factoren ist. Läßt sich alsdenn der Zähler

ler durch diesen Nenner genau dividiren, so wird diese Division wirklich vorgenommen: geht aber dieses nicht an, so werden anstatt der Buchstaben ihre Werthe gesetzt, und alsdenn erst mit den Zahlen die Division vorgenommen.

Zum Exempel.

I.

Es sey $5acx - 3bc = 2bcx - 3cd$
es wird seyn $5acx - 2bcx = 3bc - 3cd$
folglich $x = \frac{3bc - 3cd}{5ac - 2bc} = \frac{3b - 2d}{5a - 2b}$.

II.

Es sey $3ac - 3cx = 5ab - 3bx$
es wird seyn $5bx - 3cx = 5ab - 3ac$
folglich $x = \frac{5ab - 3ac}{5b - 3c} = a$.

III.

$2bx + 8b^2 - 6ab + 9ad = 3dx + 12bd$
$2bx - 3dx = 12bd - 8b^2 + 6ab - 9ad$
$x = \frac{12bd - 8b^2 + 6ab - 9ad}{2b - 3d} = 3a - 4b$.

Anmerkung.

Wenn in einer Gleichung die unbekannte Größe in mehreren Theilen vorkommt, und in einem derselben keinen Coeficienten bey sich hat, so ist die Einheit ihr Coeficient, welcher dann

dann in der Division nicht außer Acht gelassen werden muß.

Zum Exempel.

$$x + ax = bc$$

$$x = \frac{bc}{1 + a}.$$

§. 100.

Dritte Regel.

Wenn ein Theil einer Gleichung durch was immer für eine Gleichung dividirt ist, so können die übrigen Theile durch selbe Größe multiplicirt, und alsdenn dieser Divisor, wo er zuvor war, weggelassen werden.

Also wenn $\frac{x}{b} = a$, so sage man, es sey $x = ab$,

Denn $\frac{bx}{b} = ab$ gemäß dem dritten Grundsatze.

Also ist $x = ab$.

Durch Hülfe dieser Regel kann man die unbekannte Größe von allen Divisoren befreyen, und also die Brüche, in denen die unbekannte Größe ist, aufheben. Die Brüche, welche aus lauter bekannten Größen bestehen, ist nicht nöthig aufzuheben: jedoch pflegt man sie öfters auf gleiche Art wegzuschaffen, damit zuletzt der Werth der unbekannten Größe in einem einzigen Bruche erhalten werde; da man doch sonst

für

für diesen Werth mehrere Brüche mit verschiedenen Nennern erhalten würde.

Zum Exempel.

Es sey $\frac{x}{3} - 9 = 15$

es wird seyn $x - 27 = 45$ gemäß der dritten Regel.

$x = 45 + 27 = 72$ gemäß der ersten Regel.

§. 101.

Wenn in einer Gleichung mehrere Brüche vorkommen, kann man auf gleiche Art einen nach dem andern aufheben. Man sehe das folgende Exempel:

Es sey $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 7 - \frac{x}{2}$ Wenn man alles multiplicirt durch 3.

so entsteht

$x + \frac{3x}{5} = 21 - \frac{3x}{2}$ Wenn man alles multiplicirt durch 5.

$5x + 3x = 105 - \frac{15x}{2}$ Wenn man alles multiplicirt durch 2.

$10x + 6x = 210 - 15x$

$10x + 6x + 15 = 210$

$31x = 210$

$x = \frac{210}{31} = 6\frac{24}{31}$

Es

Es sey $\frac{x}{2a} + \frac{3x}{b} = c + \frac{dx}{5f}$

$$x + \frac{6ax}{b} = 2ac + \frac{2adx}{5f}$$

$$bx + 6ax = 2abc + \frac{2abdx}{5f}$$

$$5bfx + 30afx = 10abcf + 2abdx$$

$$5bfx + 30afx - 2abdx = 10abcf$$

$$x = \frac{10abcf}{5bf + 30af - 2abd.}$$

§. 102.

Man kann auch alle Brüche auf einmal wegschaffen, wenn man alle Theile der Gleichung durch das Produkt aller Nenner der Brüche multiplicirt: wobey doch dieses zu beobachten, daß man jeden Zähler der Brüche nur mit dem Produkte aller übrigen Nenner multipliciren muß, nicht aber mit dem eigenen; denn, wenn man alsdenn den eigenen Nenner wegläßt, so hat man eben darum selben Bruch auch durch seinen Nenner multiplicirt.

Zum Exempel.

I.

$$\frac{2x}{7} - \frac{6}{5} = \frac{3}{4} + \frac{5x}{6}$$

$$2x \times 5 \times 4 \times 6 - 6 \times 74 \times 6 = 3 \times 7 \times 5 \times 6 + 5x \times 7 \times 5 \times 4$$

$$240x - 1008 = 630 + 700x$$
$$240x - 700x = 630 + 1008$$
$$-460x = 1638$$
$$460x = -1638$$
$$x = -\frac{1638}{460} = -\frac{819}{230}$$

II.

Es sey $\frac{5ab}{3c} - \frac{5x}{2b} = \frac{3ac}{4} - \frac{ax}{c}$

$$5ab \times 2b \times 4 \times c - 5x \times 3c \times 4 \times c = 3ac \times 3c \times 2b \times c \times 2x \times 3c \times 2b \times 4$$

$$40ab^2c - 60c^2x = 18ac^3b - 24abcx$$
$$24abcx - 60c^2x = 18ac^3b - 40ab^2c$$
$$x = \frac{18ac^3b - 40ab^2c}{24abc - 60c^2} = \frac{9ac^2b - 20ab^2}{12ab - 30c}$$

§. 103.

Alle Regeln, welche zur Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe gehören, kurz zusammen gezogen, sind folgende. Erstens: wenn in der gegebenen Gleichung Brüche vorkommen, so hebt man diese Brüche auf, indem man die ganze Gleichung durch die Nenner der Brüche multiplicirt.

cirt. Zweytens: versetzt man die Theile der Gleichung mit Veränderung des Zeichen derer, welche versetzt werden, also, daß alle Theile, welche die unbekannte Größe in sich haben, auf der einen Seite, auf der andern alle gänzlich bekannte zu stehen kommen. Drittens, befreye man die unbekannte Größe von ihren Coeficienten oder Factoren, indem man die ganze Gleichung durch die Summe derselben dividirt.

Exempel zur Uebung.

1) Man soll die Zahl 7 in zwey Theile theilen, wovon der größere um drey größer sey, als der kleinere?

Auflösung.

Vermöge dieser Aufgabe ist der größere Theil unbekannt, man nenne dahero solchen x, so ist der kleinere Theil $7 - x$. Dahero muß seyn $x = 7 - x + 3$.

Oder:

$$x = 10 - x,$$

addirt man das x, so kommt $2x = 10$; und dividirt man mit 2, so wird $= x\ 5$. Folglich ist der größere Theil 5. und der kleinere 2.

2) Es

2) Es sollen 1600 fl. unter drey Personen dergestalt vertheilt werden, daß der erste 200 fl. mehr haben soll als der zweyte; der zweyte 100 fl. mehr als der dritte: wie viel bekommt ein jeder?

Auflösung.

Nennt man den ersten Antheil $= x$, so ist des zweyten $= x + 100$, und des dritten $= x + 300$, und die Summe von diesen dreyen Theilen zusammen $= 1600$ fl. Dahero $3x + 400 + 1600$, nun subtrahire man 400, so wird $3x = 1200$, dividirt man mit 3, so ist $x = 400$, folglich bekommt der dritte 400 fl. der zweyte 500 fl. und der erste 700 fl.

3) 8600 fl. soll unter vier Personen dergestalt vertheilt werden, daß die erste Person zweymal soviel bekommt als die zweyte weniger 100 fl. — die zweyte dreymal soviel als die dritte wenigen 200 fl., und die dritte soll haben viermal soviel als die vierte weniger 300 fl. Was trifft eine jede Person?

Auflösung.

Wenn vermöge der Aufgabe der vierten Person ihr Antheil $= x$ gesetzt wird, so trifft die dritte Person $4x - 300$, die zweyte $12x - 1100$, und die erste $24x - 2300$

und die Summe davon muß 8600 betragen; dahero entsteht die Gleichung:

$41x - 3700 = 8600$, addirt man 3700, so komt $41x = 8600 + 3700 = 12300$, dividirt man mit 41, so giebt $x = 300$, folglich ist der

vierten Person Antheil	= 300
der dritten : : :	= 900
der zweyten : : :	= 2500 und
der ersten : : :	= 4900
Summa	8600 fl. —.

4) Ein Goldschmied hat zwey silberne Becher nebst einem Deckel verfertiget. Der erste Becher wiegt 12 Loth, legt man den Deckel darauf, so wiegt er zweymal soviel als der andere Becher; legt man aber den Deckel auf den andern Becher, so wiegt er dreymal soviel als der erste Becher. Wie schwer ist nun der Deckel, und auch der andere Becher gewesen?

Auflösung.

Man setze der Deckel habe gewogen x Lt. so ist die Schwere des ersten Bechers sammt dem Deckel $x + 12$ Loth. Da nun dieses Gewicht zweymal so schwer ist als der andere Becher, so hat der andere Becher gewogen $\frac{1}{2}x + 6$. Legt man nun den Deckel darauf, so wiegt derselbe $\frac{3}{2}x + 6$, welches 3mal 12, das ist, 36 gleich seyn muß.

Folg-

Folglich hat man $\frac{3}{2}x + 6 = 36$ oder 6 subtrah.
$\frac{3}{2}x = 30$, oder $\frac{1}{2}x = 10$ und
$x = 20$, gleich der Schwere
des Deckels, und der andere Becher hat gewogen 16 Loth.

Probe.

Schwere des ersten Bechers		= 12 Loth
des Deckels	: : :	= 20 Loth
Summa	: :	= 32 Loth.

welche zweymal so schwer ist als der andere Becher.

Schwere des andern Bechers		= 16 Loth
des Deckels	: : :	= 20 Loth
Summa	: : :	= 36 Loth.

welche dreymal schwerer ist als der erste Becher.

Siebenter Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen vom zweyten Grade mit einer unbekannten Größe.

§. 104.

Die Gleichungen vom zweyten Grade sind solche, in welchen die größte Potenz der unbekannten Größe einen Coeficienten oder einen Divisor bey sich hat, das ist, wenn es durch eine bekannte Größe multiplicirt oder dividirt wird; so muß man erstens, diese bekannte Größe wegschaffen, den Coeficienten zwar durch die Division (§. 98.) den Divisor aber durch die Multiplication (§. 100.).

Zweytens. Bringe man alle Theile, welche die unbekannte Größe in sich haben, auf die eine, die gänzlich unbekannte aber auf die andere Seite (§. 88.).

Drittens. Wenn alsdenn das Quadrat der unbekannten Größe das Zeichen — vor sich hat, so verändert man alle Zeichen der Gleichung.

Viertens. Wenn das ganze Glied der Gleichung ein vollkommenes Quadrat ist, (wel-

(welches alsdenn geschieht, wenn das erste Glied aus einem einzigen Theile, nämlich aus x^2 besteht); so ziehe man aus selben die Quadratwurzel. Eben diese Wurzel ziehe man auch aus dem zweyten Gliede der Gleichung, wenn es sich anders thun läßt. Geht aber diese Ausziehung der Wurzel bey dem zweyten Gliede nicht an; so setze man das Zeichen $\sqrt{}$ vor dasselbe.

Fünftens. Hat aber das erste Glied der Gleichung neben dem x^2 noch einen andern Theil, welcher aus der unbekannten Größe, mit einer bekannten Größe multiplicirt, oder dividirt, besteht; so nehme man die Hälfte dieses Coeficienten oder Factors: erhebe man diese Hälfte zum Quadrat: setze man dieses Quadrat zu jedem Gliede der Gleichung. Solcher Gestalt wird das erste Glied der Gleichung jederzeit ein vollkommenes Quadrat werden, wie leicht erhellet aus jenem Lehrsatze: Das Quadrat einer zweygliedichten Größe begreift in sich das Quadrat des ersten Theils, das Produkt des zweyten Theils, und das doppelte Produkt des ersten durch den zweyten.

Sechtens. Wenn nun das erste Glied zu einem vollkommenen Quadrate geworden, so ziehe man aus beyden Gliedern der Gleichung die Quadratwurzel, oder wenn dieses bey dem zweyten Gliede sich nicht thun läßt,

so setze man das Zeichen $\sqrt{}$ davor. Die Quadratwurzel des ersten Glieds ist allezeit x und der halbe Coeficient, mit welchem das x in der Gleichung multiplicirt ist, und zwar mit eben seinem Zeichen.

Siebentens. Brauche man nochmals die Versetzung; indem man den in der Ausziehung der Wurzel erhaltenen bekannten Theil auf die andere Seite setzt, mit Veränderung seines Zeichens.

§. 105.

Hiebey ist noch zu merken, daß man in dem zweyten Gliede vor das Wurzelzeichen + und — setzen, und auch die Wurzel selbst, wenn man sie ausgezogen hat, mit beyden Zeichen nehmen muß: daß also in jeder Gleichung vom zweyten Grade die unbekannte Größe zweyerley Werthe hat.

Die Hälfte des Coeficienten von x kann man leicht bekommen, wenn man diesen Coeficienten, oder wenn es mehrere sind, die Summe der Coeficienten durch zwey dividirt, oder wenn diese Division nicht ohne Rest angeht, 2 als den Denominator darunter schreibe.

Alles

Alles dieses kann man in folgenden Exempeln sehen.

Man soll die Gleichung $2x^2 = 4x + 16$ auflösen. Weil x^2 mit 2 multiplicirt ist, so dividire man die ganze Gleichung durch 2, und schaffe also diesen Coeficienten weg. Man bekommt $x^2 = 2x = +8$; setze man alle Theile, so ein x haben, auf die erste Seite: hieraus entsteht $x^2 - 2x = 8$: der Coeficient von x ist -2: dessen Hälfte ist -1. Dessen Quadrat ist $+1$: setze man dieses zu beyden Gliedern: so bekommt man $x^2\ 2x + 1 = 8 + 1 = 9$. Ziehe man aus dem ersten Gliede die Quadratwurzel. Diese Wurzel zu finden braucht es gar kein Rechnen: sie besteht nämlich aus zweyen Gliedern: das erste ist x, das zweyte die Hälfte des Coeficienten -2, nämlich -1: die ganze Wurzel ist also $x - 1$. Ziehe man eben die Wurzel aus dem andern Gliede der Gleichung, nämlich aus 9, nehme man sie aber mit beyden Zeichen + und −; sie ist ± 3. Man hat also nunmehr $x - 1 = \pm 3$. Setze man den bekannten Theil -1 auf die andere Seite: hieraus entsteht $x = 1 \pm 3$. Der Werth der unbekannten Größe ist also $x = 1 + 3$ das ist 4, oder auch $1 - 3$, das ist -2. Man sehe hier die ganze Bearbeitung.

$$2x^2 = 4x + 16$$
$$x^2 = 2x + 8$$
$$x^2 - 2x = 8$$
$$x^2 - 2x + 1 = 8 + 1 = 9$$
$$x - 1 = \pm 3$$
$$x = 1 \pm 3 = 4 \text{ oder auch } -2.$$

Es sey die Gleichung $\frac{3x^2}{5} - 18 = 2x$. Man schaffe den Divisor 5 weg, indem man die ganze Gleichung dadurch multiplicirt. Es entsteht $3x^2 - 90 = 10x$. Schaffe man den Coeficienten 3 weg, indem man die ganze Gleichung dadurch dividirt. Es entsteht $x^2 - 30 = \frac{10x}{3}$. Bringe man alle x auf die erste, das gänzlich bekannte Glied auf die andere Seite. Es entsteht $x^2 - \frac{10x}{3} = 30$: der Coeficient von x ist $-\frac{10}{3}$: dessen Hälfte erhebe man zum Quadrate: es ist $\frac{25}{9}$: dieses Quadrat setze man zu beyden Gliedern: hieraus entsteht $x^2 - \frac{10x}{3} + \frac{25}{9} = 30 + \frac{25}{9}$: ziehe man die Quadratwurzel aus dem ersten Gliede: sie muß bestehen aus x und dem halben Coeficienten, den x in der Gleichung hatte: sie ist also $x - \frac{5}{3}$. Vor das zweyte Glied der Gleichung setze man das Wurzelzeichen $\surd$ mit

+ und

+ und —. Hieraus entsteht $x - \frac{5}{3} = \pm\sqrt{30 + \frac{25}{9}}$: setze man den bekannten Theil $-\frac{3}{5}$ auf die andere Seite mit Veränderung seines Zeichens. Hieraus entsteht $x = \frac{5}{3} \pm \sqrt{30 + \frac{25}{9}}$. Um nun die Wurzel aus jener Zahl, die unter dem Wurzelzeichen steht, wenigst beynahe ausziehen zu können, so bringe man alles unter einen Bruch: hieraus entsteht $x = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{295}{9}}$. Nun ziehe man die Quadratwurzel, besonders aus dem Numerator und wieder besonders aus dem Denominator, und schreibe man sie unter einander in Gestalt eines Bruches. Die Wurzel des Numerators ist, wenn man sie in Decimalen sucht, beynahe 17. 176. Die Wurzel des Denominators ist genau 3. Die Gleichung wird nunmehr also stehen $x = \frac{5}{3} \pm \frac{17.176}{3}$. Wenn man nun diese beyden Brüche in Decimalbrüche verwandelt, so bekommt man anstatt des ersten Bruches $\frac{5}{3}$ diesen 16666, und anstatt des zweyten diesen 5.7253: die vorige Gleichung wird also in diese verwandelt $x = 1,6666 \pm 5.7253$. Wenn man endlich den zweyten Decimalbruch mit dem Zeichen + nimmt, und also zum ersten addirt, so entsteht $x = +7.3919$. Wenn man aber den zweyten Bruch mit dem Zeichen — nimmt, und also den ersten kleinern davon abzieht, so entsteht $x = -4.0587$: die zween Werthe von x in dieser Gleichung sind also

 +7.3919,

$+ 7.3919$, und $- 4.0587$. Man sehe hier die ganze Ordnung der Berechnung.

$$\frac{3x^2}{5} - 18 = 2x$$

$$3x^2 - 90 = 10x$$

$$x^2 - 30 - \frac{10x}{3}$$

$$x^2 - \frac{10x}{3} = 30$$

$$x^2 - \frac{10x}{3} + \tfrac{25}{9} = 30 + \tfrac{25}{9}$$

$$x - \tfrac{5}{3} = \pm \sqrt{30 + \tfrac{25}{9}}$$

$$x = \tfrac{5}{3} \pm \sqrt{30 + \tfrac{25}{9}}$$

$$x = \tfrac{5}{3} \pm \sqrt{\tfrac{295}{9}}$$

$$x = \tfrac{5}{3} \pm \frac{17.176}{3}$$

$$x = 1{,}6666 \pm 5{,}7253$$

$$x = 7.3919 \text{ oder auch } - 4.0587.$$

Es sey die Gleichung $x^2 - 12 = - 5x$. Nach der Versetzung hat man $x^2 + 5x = 12$. Der halbe Coeficient von x ist $\frac{5}{2}$: dessen Quadrat ist $\frac{25}{4}$: wenn man dieses zu beyden Gliedern addirt, so entsteht $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = 12 + \frac{25}{4}$. Wenn man aus dem ersten Gliede die Wurzel zieht, vor das zweyte aber das Wurzelzeichen setzt, so bekommt man $x + \frac{5}{2}$

=

$= \pm \sqrt{12 + \frac{25}{4}}$. Wenn man, was unter dem Wurzelzeichen steht, unter einen Bruch bringt, so hat man $x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{73}{4}}$. Wenn man den bekannten Theil $\frac{5}{2}$ versetzt, so entsteht $x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{73}{4}}$. Wenn man aus dem Zähler und Nenner die Quadratwurzel zieht, so bekommt man $x = -\frac{5}{2} \pm \frac{8,544}{2}$. Wenn man beyde Brüche in Decimalbrüche verändert, so wird $x = -2,5 \pm 4,272$. Wenn man endlich den zweyten Bruch mit dem Zeichen $+$ nimmt, so entsteht $x = 1,772$. Nimmt man ihn aber mit dem Zeichen $-$, so wird $x = 6,772$. Die Werthe von x in dieser Gleichung sind also $1,772$ und $-6,772$.

Es sey die Gleichung $x^2 - 6x = -10$. Der halbe Coeficient ist -3, dessen Quadrat ist $+9$: dieses beyderseits addirt giebt $x^2 - 6x + 9 = -10 + 9 = -1$. Wenn man aus dem ersten Theile die Wurzel zieht, und dem zweyten das Wurzelzeichen vorsetzt, so bekommt man $x - 3 = \pm \sqrt{-1}$, und nach der Versetzung $x = 3 \pm \sqrt{-1}$. Weil nun die unter dem Wurzelzeichen stehende Größe negativ ist, so kann unmöglich eine Quadratwurzel daraus gezogen werden. Die Werthe von x sind also in dieser Gleichung beyde unmöglich. Man sehe hier die Berechnung.

$$x^2 - 6x = -10$$
$$x^2 - 6x + 9 = -10 + 9 = -1$$
$$x - 3 = \pm\sqrt{-1}$$
$$x = 3 \pm \sqrt{-1}.$$

Es sey die Gleichung $4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18b^2$: durch die Versetzung entsteht $-2x^2 + 2ax = 18ab - 18b^2 - 4a^2$: und nach Veränderung aller Zeichen $2x^2 - ax = -18ab + 18b^2 + 4a^2$. Nach Wegschaffung des Coeficient $2, x^2 - ax = -9ab + 9b^2 + 2a^2$. Wenn man den halben Coeficienten von x, nämlich $-\frac{a}{2}$ zum Quadrate erhebt, und dieses beyderseits addirt, so entsteht $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = -9ab + 9b^2 + 2a^2 + \frac{a^2}{4}$. Wenn man aus dem ersten Gliede die Quadratwurzel auszieht, vor das zweyte das Wurzelzeichen setzt, so entsteht $x - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-9ab + 9b^2 + 2a^2 + \frac{a^2}{4}}$.

Wenn man das bekannte Glied $-\frac{a}{2}$ versetzt, so entsteht $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-9ab + 9b^2 + 2a^2 + \frac{a^2}{4}}$.

Wenn man alles, was unter dem Wurzelzeichen steht, unter einen Bruch bringt, so hat man

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{-36ab + 36b^2 + 9a^2}{4}}.$$

Läßt

Läßt sich die Quadratwurzel aus dem Numerator und Denominator genau ausziehen: so ziehe man sie also aus: man bekommt $\frac{3a-6b}{2}$ oder auch $\frac{-3a+6b}{2}$: wenn man die erste aus diesen zwoen Wurzeln nimmt, so entsteht $x=\frac{a}{2}+\frac{3a-6b}{2}$ od. $\frac{4a-6b}{2}$, das ist, $2a-3b$. Nimmt man aber die letzte aus diesen zwoen Wurzeln, so hat man $x=\frac{a}{2}-\frac{3a+6b}{2}$ oder $-\frac{2a+6b}{2}$ oder $-a+3b$. Diese zween Werthe von x in dieser Gleichung sind also $2a+3b$ und $-a+3b$. Man sehe hier die Ordnung der Berechnung.

$$4a^2-2x^2+2ax=+18ab-18b^2$$
$$-2x^2+2ax=18ab-18b^2-4a^2$$
$$2x^2-2ax=-18ab+18b^2+4a^2$$
$$x^2-ax=-9ab+9b^2+2a^2$$
$$x^2-ax+\frac{a^2}{4}=-9ab+9b^2+2a^2+\frac{a^2}{4}$$
$$x-\frac{a}{2}=\pm\sqrt{-9ab+9b^2+2a^2+\frac{a^2}{4}}$$

$x=$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-9ab + 6b^2 + 2a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{-36ab + 36b^2 + 9a^2}{4}}$$

$$x = \frac{a}{2} + \frac{3a - 6b}{2}$$

$$x = \frac{a}{2} + \frac{3a - 6b}{2} = \frac{4a - 6b}{2} = 2a - 3b$$

$$x = \frac{a}{2} - \frac{3a + 6b}{2} = \frac{-2a + 6b}{2} = a + 3b.$$

Anmerkung.

Man sieht hier, daß, wenn man die gefundene Wurzel $3a - 6b$ negativ, das ist, im verkehrten Verstande nehmen wollte, man alle Zeichen derselben verändern, und also anstatt $3a - 6b$ schreiben müßte, $-3a + 6b$. Welches man für allezeit sich wohl merken muß.

I.	II.
$x^2 = a$	$x^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$x = \pm\sqrt{a}$	$x = \pm(a + b)$
	$x = a + b$, oder auch $-a - b$

III.

$$x^2 = 4a^2 - 8ab + 4b^2$$

$$x = \pm(2a - 2b)$$

$x = 2a - 2b$, oder auch $-2a + 2b$.

IV.

IV.

$$x^2 = 2c^2x + 2c^2a$$
$$x^2 - 2c^2x + 2c^2a$$
$$x^2 - 2c^2x + c^4 = 2c^2 + c^4$$
$$x - c^2 = \pm\sqrt{2c^2a + c^4}$$
$$x = c^2 \pm \sqrt{2c^2a + c^4}.$$

V.

$$x^2 = -5 + 6x$$
$$x^2 - 6x = -5$$
$$x^2 - 6x + 9 = -5 + 9 = 4$$
$$x - 3 = +2$$
$$x = 3 \pm 2 = 5,\ \text{oder auch } 1.$$

Achter Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

§. 106.

Es ist oben §. 84. gesagt worden, in einer unbestimmten Gleichung habe jede unbekannte Größe unendlich vielerley Werthe. Allein, wenn man so viele verschiedene, von einander unabhängige Gleichungen hat, als viele unbekannte Größen sind, kann man zu einer solchen Gleichung gelangen, welche nur noch eine unbekannte Größe in sich hat, deren Werth hiemit bestimmt seyn wird. Dieses kann auf dreyerley Arten

gesche-

geschehen: 1) durch die Substitution: 2) durch die Vergleichung der Werthe, und 3) durch die Addition oder Subtraktion.

§. 107.

Erste Art.

Durch die Substitution.

In einer aus den Anfangs gegebenen Gleichungen sucht man den Werth von was immer für einer unbekannten Größe. Setze man diesen in den übrigen Gleichungen anstatt eben dieser unbekannten Größe. Hieraus entstehen neue Gleichungen, in denen selbe unbekannte Größe nicht mehr anzutreffen ist. In einer aus diesen suche man den Werth einer andern unbekannten Größe: diesen setze man abermal in den übrigen anstatt dieser unbekannten Größe. Hieraus entstehen wieder neue Gleichungen, in denen schon zwo unbekannte Größen abgehen. Setze man dieses so lange fort, bis man zu einer einzigen Gleichung gelangt, welche nur noch eine unbekannte Größe in sich hat. Wenn man nun den Werth dieser unbekannten Größe in dieser letzten Gleichung sucht, so wird man ihn in lauter bekannten Größen finden: und wenn man diesen gänzlich bestimmten Werth dieser unbekannten Größe in einer aus den vorhergehenden Gleichungen anstatt derselben setzt; so kann man den Werth einer andern unbekann-

kann-

kannten Größe ebenfalls gänzlich bestimmen: und wenn man ferner die Werthe dieser zwo unbekannten Größen wieder in einer vorhergehenden Gleichung anstatt derselben setzt; so findet man den Werth der dritten, und also ferner, bis man endlich die Werthe aller unbekannten Größen gänzlich bestimmt hat.

Zum Exempel.

Es seyn diese drey Gleichungen gegeben.

$$x + y = a$$
$$y + z = b$$
$$x + z = c.$$

Wenn man in der ersten aus diesen gegebenen Gleichungen den Werth von x sucht, so findet man $x = a - y$. Wenn man nun diesen Werth von x in der dritten aus den gegebenen Gleichungen anstatt x setzt, so entsteht $a - y + z = c$. Die zweyte aus den anfangs gegebenen Gleichungen bleibt unverändert, weil die unbekannte Größe x nicht darinn vorkömmt. Die zwo neuen Gleichungen, welche wir die zweyten nennen, sind also diese:

$$y + z = b$$
$$a - y + z = c.$$

Wenn man in der ersten aus diesen zwoen Gleichungen den Werth von y sucht, so findet man $y = b - z$. Setzt man den Werth von y in der andern aus den zweyten Gleichungen anstatt des y, so entsteht $a - b + z + z = c$.

In dieser Gleichung nun ist keine andere unbekannte Größe als z. Man kann also den Werth von z gänzlich bestimmen; denn, wenn man beyde z zusammensetzt, so entsteht $2z + a - b = c$: und wenn man $+ a\, b$ versetzt, so bekommt man $2z = c - a + b$. Wenn man endlich die ganze Gleichung durch 2 dividirt, so hat man $z = \frac{c - a + b}{2}$. Setzt man nun diesen gänzlich bestimmten Werth von z in der vorhergehenden Gleichung $y = b - z$. Es enstehet $y = b \frac{- c + a - b}{2}$: und wenn man das ganze zweyte Glied unter einen Bruch bringt, so entsteht $y = \frac{2b - c + a - b}{2}$: wenn man endlich die b zusammensetzt, so hat man $y = \frac{b - c + a}{2}$. Setzt man den also gefundenen Werth von y in der vorhergehenden Gleichung $x = a - y$, so bekommt man $x = a \frac{- b + c - a}{2}$ wenn man das zweyte Glied unter einen Bruch bringt, so entsteht $x = \frac{2a - b + c - a}{2}$: setzt man die a zusammen, so bekommt man $x = \frac{a - b + c}{2}$. Die Werthe

aller

aller drey unbekannten Grössen sind hiemit diese:

$$x = \frac{a - b + c}{2} : y = \frac{b - c + a}{2}\ z = \frac{c - a + b}{2}$$

Man sehe hier die ganze Bearbeitung der Ordnung nach angesetzt.

	Erste Gleichungen. $x + y = a$ $y + z = b$ $x + z = a$	$a = a - y$ der Werth von x in der ersten Gleichung.
diese zweyte Gleichungen.	hieraus entstehen $y + z = b$ $a - y + z = c$	$y = b - z$ der Werth von y in der ersten aus den zweyten Gleichungen.
diese dritte Gleichung: olglich ist	hieraus entstehen $a - b + z + z = c$ $2z = c - a + b$	$z = \frac{c - a + b}{2}$ $y = b \frac{- c + a - b}{2} = \frac{b - c + a}{2}$ $x = a \frac{- b + c - a}{2} = \frac{a - b + c}{2}$

Zweytes Exempel.

Erste Gleichung.

$$3x - 2y = 5$$
$$2y + x = 7$$

$$x = \frac{5 + 2y}{3}.$$

Hieraus entsteht diese zweyte Gleichung.

$$2y + \frac{5 + 2y}{3} = 7$$

$$6y + 5 + 2y = 21$$
$$8y = 21 - 5 = 16$$

$$y = \frac{16}{8} = 2$$

$$x = \frac{5 + 4}{3} = 3$$

Drittes Exempel.

Erste Gleichungen.

$$2ax - by = c$$
$$3by + 5x = d$$

$$x = \frac{c + by}{2a}$$

Hieraus entsteht diese zweyte Gleichung.

$$3by + \frac{5c + 5by}{2a} = d$$

$$6aby + 5c + 5by = 2ad$$
$$6bby + 5by = 2ad - 5c$$
$$y = \frac{2ad - 5c}{6ab + 5b}$$

Wenn man nun in der Gleichung $2ax - by = c$ diesen Werth von y anstatt des y setzt, so entsteht

$$2ax - \frac{2abd + 5bc}{6ab + 5b} = c$$

$$12a^2bx + 10abx - 2abd + 5bc = 6abc + 5bc$$

$$12a^2bx + 10abx = 6abc + 5bc - 5bc + 2abd$$

$$x = \frac{6abc + 2abd}{12a^2b + 10ab}$$

$$x = \frac{3c + d}{6a + 5}$$

Viertes Exempel.

Man suche zwey Zahlen, deren Summe 15 und die Differenz 7 ist?

Es sey die größere Zahl $= x$. und die kleinere Zahl $= y$.

so ist vermöge der Aufgabe $x + y = 15$

und $x - y = 7$.

Aus der ersten bekommt man $x = 15 - y$.

aus der zweyten : : : : $x = 7 + y$.

Hieraus entspringt nun die neue Gleichung

$$15 - y = 7 + y.$$

addirt man y, so hat man $15 = 7 + 2y$, man subtrahire 7, so wird $15 - 7 = 2y = 2y = 8$, durch 2 dividirt, wird $y = 4$ und folglich $x = 11$.

Antwort, die kleinere Zahl ist 4, und die größere 11.

§. 108.

Zweyte Art.

Durch die Vergleichung der Werthe.

In einer jeden aus den gegebenen Gleichungen sucht man den Werth von einer nämlichen unbekannte Größe, z. Ex. von x. Diese Werthe sind nothwendig einander gleich. Man hat also neue Gleichungen, in welchen schon eine unbekannte Größe abgeht. In diesen Gleichungen sucht man die Werthe einer andern unbekannten Größe. Diese sind einander wieder gleich. Es entstehen also neue Gleichungen, in welchen schon zwo unbekannte Größen abgehen, u. s. f. bis man eine Gleichung erhält, in welcher nur noch eine unbekannte Größe vorkommt. Wenn man nun den Werth dieser unbekannten Größe in dieser letzten Gleichung in lauter bekannten Größen gefunden hat, und denselben aus den vorhergehenden Gleichungen anstatt eben dieser unbekannten Größe setzt, so kann man den Werth einer andern unbekannten Größe wieder gänzlich bestimmen. Und, wenn man den Werth dieser zwo unbekannten Größen wieder in einer aus den vorhergehenden Gleichungen setzt, so findet man den Werth der dritten u. s. f.

bis

bis man endlich den Werth aller unbekannten Größen gefunden hat.

Zum Exempel.

Es seyn gegeben diese Gleichungen $\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ x+z=c \end{cases}$

Suche man den Werth von x in der ersten und dritten. Er ist

in der ersten $x=a-y$
in der dritten $x=c-z$
hieraus entsteht $a-y=c-z$

weil die zweyte aus den gegebenen Gleichungen kein x in sich hat, so bleibt sie unverändert. Man hat also diese zwo zweyten Gleichungen.

$$a-y=c-z$$
$$y+z=b.$$

Suche man nun in beyden den Werth von y.

Die erste giebt $y=a+z-c$
Die zweyte $y=b-z$
Hieraus ersteht $a+z-c=b-z.$

In dieser ist keine andere unbekannte Größe, als z. Suche man also den Werth von z. Man bekommt:

$$2z = b + c - a$$

und folglich $z = \frac{b + c - a}{2}$

Setze man diesen Werth von z in der Gleichung $y + z = b$ anstatt des z:

Hieraus entsteht $y + \frac{b + c - a}{2} = b$.

Wenn man den Bruch aufhebt, so bekommt man $2y + b + c - a = 2b$: und nach der Versetzung $2y = 2b - b - c + a$: und endlich $y = \frac{b - c + a}{2}$.

Setze man diesen Werth von y in der Gleichung $x + y = a$ anstatt des y. Man bekommt $x + \frac{b - c + a}{2} = a$. Und wenn man den Bruch aufhebt, so erhält man $2x + b - c + a = 2a$. Und durch die Versetzung $2x = 2a - a + c - b$. Und endlich $x = \frac{a + c - b}{2}$. Die Werthe der drey unbekann-

bekannten Größen sind also $x = \frac{a - b + c}{2}$

$y = \frac{b - c + a}{2}$ $z = \frac{b + c - a}{2}$. Alle drey sind eben dieselben, die man oben nach der ersten Art gefunden hat.

Zweytes Exempel.

Erste Gleichungen.

Es sey $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2y + x = 7 \end{cases}$ | $x = \frac{5 + 2y}{3}$

Hieraus entsteht | $x = 7 - 2y$

Diese zweyte $\frac{5 + 2y}{3} = 7 - 2y$

$5 + 2y = 21 - 6y$

$8y = 21 - 5 = 16$ | $y = \frac{16}{8} = 2$

$x = 7 - 4 = 3$

Drittes Exempel.

Erste Gleichungen.

Es sey $\left\{\begin{array}{l} 2ax - by = c \\ 3by + 5x = d \end{array}\right.$ | $x = \frac{c + by}{2a}$

Hieraus entsteht

diese zweyte $\frac{c + by}{2a} = \frac{d - 3by}{5}$ | $x = \frac{d - 3by}{5}$

$$5c + 5by = 2ad - 6abyc$$

$$6aby - 5by = 2ad - 5$$

$$y = \frac{2ad - 5c}{5ab + 5b}$$

Und wenn man diesen Werth von y in der Gleichung $2ax - by$ anstatt des y setzt, so entsteht $2ax = \frac{2abd + 5bc}{6ab + 5b} = c$

$$12a^2bx + 10abx - 2abd + 5bc = 6abc + 5bc$$

$$12a^2bx + 10abx = 6abc + 5bc - bc - 2abd$$

$$x = \frac{6abc + 2abd}{12a^2b + 10ab}$$

$$x = \frac{3c + d}{6a + 5}$$

Viertes Exempel.

Es seyn gegeben diese drey ersten Gleichungen.

$$2x+3y+z=14$$
$$x-z+2y=7$$
$$z-y-2x=-6.$$

Wenn man in einer jeden aus diesen dreyen den Werth von x sucht, so findet man

In der ersten $x=\frac{14-3y-z}{2}$

In der zweyten $x=7-2y+z$

In der dritten $x=\frac{6-y+z}{2}$.

Vergleicht man den ersten Werth mit dem zweyten, und alsdenn auch mit dem dritten, so entstehen folgende zwey Gleichungen:

$$\frac{14-3y-z}{2}=7-2y+z$$
$$\frac{14-3y-z}{2}=\frac{6-y+z}{2}.$$

Suche man in der ersten aus diesen zweyen Gleichungen den Werth von y, so geht es also her:

$$15-3y-z=14-4y+2z$$
$$4y-3y=2z+z+14-14$$
$$y=3z$$

Suche man den Werth von y in der andern aus den zweyten Gleichungen, so findet man

$14-3y$

$$14 - 3y - z = 6 - y + z$$
$$-3y + y = 6 - 14 + z + z$$
$$-2y = -8 + 2z$$
$$2y = 8 - 2z$$
$$y = 4 - z$$

Vergleicht man diese zween Werthe von y mit einander, so hat man

$$3z = 4 - z$$
$$4z = 4$$
$$z = 1$$

Setzt man den Werth von z in der Gleichung $y = 3z$, so bekommt $y = 3 \times 1 = 3.$

Setzt man den Werth von y und z in der Gleichung $x = \frac{14 - 3y - z}{2}$, so bekommt man

$$x = \frac{14 - 9 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Die Werthe der unbekannten Größen sind hiemit diese: $x = 2.$ $y = 3.$ $x = 1.$

§. 109.

Dritte Art.

Durch die Addition und Subtraction.

Wenn in zwoen aus den gegebenen ersten Gleichungen eine nämliche unbekannte Größe mit

mit dem nämlichen Coeficienten anzutreffen ist, so addirt man diese zwo Gleichungen zusammen (nämlich das erste Glied zum ersten, das zweyte zum zweyten) oder man subtrahirt sie von einander. Addiren muß man sie, wenn die unbekannte Größe in den zwoen Gleichungen verschiedene Zeichen haben: haben sie aber das nämliche Zeichen, so muß man die Subtraction brauchen. Also wird diese unbekannte Größe wegfallen. Auf gleiche Art kann man auch die übrigen unbekannten Größen wegschaffen, bis man endlich nur noch eine hat, deren Werth man also gänzlich bestimmen kann.

Zum Exempel.

$$x + y = a$$
$$y + z = b$$
$$x + z = c.$$

Wenn man die dritte Gleichung von der ersten abzieht, so entsteht $y - y = c$ man hat aber schon oben $y + z = b$.

Wenn man nun die gefundene von dieser letzten abzieht, so bekommt man $2z = b + c - a$ und aus dieser $z = \frac{b + c - a}{2}$ wie oben nach der ersten und zweyten Art.

Wenn

Wenn man diese von der obigen $y + z = b$ abzieht, so entsteht

$$y = b \frac{- b - c + a}{2} = \frac{b - c + a}{2} \text{ wie oben.}$$

Wenn man diese letzte von der ersten $x + y = a$ abzieht, so bekommt man

$$x = a \frac{- b + c - a}{2} = \frac{a - b + c}{2} \text{ wie oben.}$$

Zweytes Exempel.

Es sey $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2y + x = 7 \end{cases}$

Addire man die erste zur zweyten. Es entsteht $4x = 5 + 7 = 12$

$x = \frac{12}{4} = 3$ wie oben.

§. 110.

Zuweilen muß man eine kleine Vorbereitung machen, ehe man dieser Art sich bedienen kann. Diese Vorbereitung aber besteht darinn, daß man der unbekannten Größe, die man wegschaffen will, in beyden Gleichungen einen nämlichen Coeficienten gebe, welches man durch die Multiplication leicht erhält. Die allgemeine Regel, hiezu zu gelangen, ist diese. Man multiplicire die ganze erste Gleichung durch den Coeficienten, den die unbekannte Größe, die man wegschaffen will, in der zweyten

ten Gleichung hat: man multiplicire ebenfalls die ganze zweyte Gleichung durch den Coeficienten, den eben diese unbekannte Größe in der ersten Gleichung hat. Jedoch läßt sich die Sache zuweilen etwas leichter verrichten, welches man am besten durch die Uebung erlernen kann.

Zum Exempel.

Es sey $\begin{cases} 2ax - by = c \\ 3by + 5x = d. \end{cases}$

Multiplicire man die erste Gleichung durch den Coeficienten von x in der zweyten, nämlich durch 5: die zweyte durch den Coeficienten von x in der ersten, nämlich durch $2a$: es entstehen folgende zwo neue:

$$10ax - 5bz = 5c$$
$$6aby + 10ax = 2ad.$$

Subtrahire man die untere von der obern: es entsteht $-5by - 6aby = 5c - 2ad$
oder $5by + 6aby = 2ad - 5c$

$$y = \frac{2ad - 5c}{5b + 6ab} \text{ wie oben.}$$

Halte man nun diese letzte Gleichung gegen einer aus den Anfangs gegebenen: etwa gegen der Gleichung $2ax - by = c$.

Weil in dieser Gleichung das y den Coeficienten b hat, so multiplicire man die vorhergehende Gleichung durch b.

Man

Man bekommt

$$by = \frac{2abd - 5bc}{5b + 6ab} = \frac{2ad - 5c}{5 \times 6a}$$

Addire man beyde. Es entsteht

$$2ax = c + \frac{2ad - 5c}{5 + 6a}:$$

und aus dieser

$$10ax + 12a^2x = 5c + 6ac + 2ad - 5c$$
$$10ax + 12a^2x = 5ac + 2ad$$
$$x = \frac{6ac + 2ad}{10a + 12a^2} = \frac{2c + d}{5 + 6a}$$ wie oben.

Zweytes Exempel.

Es sey $\begin{cases} 3x + 3y + z = 14 \\ x - z + 2y = 7 \\ zy - 2x = -6 \end{cases}$

Addire man die erste Gleichung zur zweyten, und subtrahire man die dritte von der ersten, so entstehen folgende zwo Gleichungen, in denen das z ausgemustert ist.

$$3x + 5y = 14 + 7 = 21$$
$$4x + 4y = 14 + 6 = 20$$

Multiplicire man die erste aus diesen zwoen neuen Gleichungen durch 4, die andere durch 3, so entstehen diese zwo neuen, in denen das x den nämlichen Coeficienten hat.

$$12x + 20y = 84$$
$$12x + 12y = 60$$

Subtrahire man die untere von der obern. Es entsteht diese neue Gleichung.

$$20y - 22y = 84 - 60$$
$$8y = 24$$
$$y = 3 \text{ wie oben.}$$

Halte man nun diese letzte Gleichung gegen einer aus den vorhergehenden, in der nur die unbekannten Größen x und y vorkommen: etwa gegen der Gleichung

$$3x + 5y = 21.$$

Multiplicire man die Gleichung $y = 3$ durch 5, so entsteht eine Gleichung, in welcher das y eben den Coeficienten 5, als wie in der vorhergehenden hat, nämlich

$$5y = 15.$$

Subtrahire man diese von der vorhergehenden. Es ensteht $3x = 21 - 15 = 6$

$$x = \frac{6}{3} = 2 \text{ wie oben.}$$

Man kann auf gleiche Art fortfahren, um den Werth von z zu bestimmen. Allein es wird geschwinder geschehen seyn, wenn man in einer aus den Anfangs gegebenen Gleichungen, etwa in der Gleichung $2x + 3y + z = 14$ die schon gefundenen Werthe von y und z an ihrer Statt setzt.

Es entsteht $5+9+z=14$

$z=14-9-4=1$ wie oben.

§. 111.

Man mag sich was immer für eine Art, aus diesen dreyen erklärten, bedienen, so wird doch die Arbeit, da man die Werthe für zwo, und noch vielmehr für drey unbekannten Größen sucht, schon etwas weitläuftig. Eine andere Art, durch welche man die Werthe von zwoen, und auch von dreyen unbekannten Größen ohne allen Umschweif finden und herschreiben kann, ist folgende.

Man bringe was immer für zwo gegebene Gleichungen unter diese Form.

$$ax+by=c$$
$$dx+ey=f.$$

Den Werth von y zu finden multiplicire man a, den Coeficienten von x in der ersten Gleichung durch f, das gänzlich bekannte Glied der zweyten Gleichung. Multiplicire man d den Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch c, das gänzlich bekannte Glied der ersten Gleichung. Ziehe man dieses zweyte Produkt von dem ersten ab, so hat man $af-cd$ den Numerator jenes Bruchs, der dem y gleich ist. Um den Denominator zu finden, multiplicire man a den Coeficienten von x in der ersten Gleichung durch e den Coeficienten von y in der zweyten Gleichung: und den Coefi-

Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den Coeficienten von y in der ersten Gleichung. Ziehe man das zweyte Produkt von dem ersten ab, so hat man $ae - bd$ den verlangten Denominator. Es wird also in unsern zwoen Gleichungen seyn

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Den Werth von x zu bekommen, multiplicire man b, den Coeficienten von y in der ersten Gleichung durch f, das gänzlich bekannte Glied der zweyten Gleichung: und e, den Coeficienten von y in der zweyten Gleichung durch c, das gänzlich bekannte Glied der ersten Gleichung. Das zweyte Produkt ziehe man vom ersten ab: der Rest $bf - ce$ ist der Numerator des Bruchs, der dem x gleich ist. Der Denominator ist eben der, den man für y gefunden hat, aber mit Veränderung aller Zeichen. Es ist also in unsern zwoen Gleichungen.

$$x = \frac{bf - ce}{bd - ae}.$$

§. 112.

Wenn in den zwoen Gleichungen verschiedene Zeichen vorkommen, so bleibt die ganze Art, der Werth der unbekannten Größen zu finden, vollkommen die nämliche, wenn man nur dieses wohl merkt, daß man in jeder Ver-

richtung das erste Produkt mit jenem Zeichen nehme, welches ihm kraft der Multiplication gebührt: das andere aber, weil es vom ersten abgezogen werden muß, mit verändertem Zeichen.

Erstes Exempel.

Es sey $\begin{cases} 2ax - by = c \\ 5x + 3by = d \end{cases}$

$$y = \frac{2ad - 5c}{6ab + 5b} \text{ wie oben.}$$

$$x = \frac{-bd - 3bc}{-6ab - 5b} = \frac{bd + 3bc}{6ab + 5b} = \frac{3c + d}{6a + 5}$$

wie oben.

Zweytes Exempel.

Es sey $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

$$y = \frac{21 - 5}{6 + 2} = \frac{16}{8} = 2 \text{ wie oben.}$$

$$x = \frac{-14 - 10}{-8} = \frac{24}{8} = 3 \text{ wie oben.}$$

Drittes Exempel.

Es sey $\begin{cases} ax - by = c \\ dz - fy = g \end{cases}$

$$y = \frac{ag - cd}{-af + bd}$$

$$x = \frac{-bg + cf}{af - bd}$$

Viertes Exempel.

Es sey $\begin{cases} -ax - by = c \\ dx + ey = -f \end{cases}$

$$y = \frac{af - cd}{-ae + bd}$$

$$x = \frac{bf - ce}{ae - bd}.$$

§. 113.

Wenn in einer aus den zwoen Gleichungen eine unbekannte Größe abgeht, so ist die ganze Art der Auflösung noch die nämliche, wenn man nur den Abgang der unbekannten Größe durch ein Zeichen, etwa durch * anzeigt, und alsdenn merkt, daß alle jene Produkte, in welche der Coeficient der unbekannten Größe, welche dießmal abgeht, wenn sie zugegen wäre, kommen müßte, gleich o werden und also wegfallen.

Erstes Exempel.

Es sey $\begin{cases} ax - by = c \\ dx * = f \end{cases}$

$$y = \frac{af - cd}{bd}$$

$$x = \frac{-bf}{bd} = \frac{bf}{bd} = \frac{f}{d}$$

Zweytes Exempel.

Es sey $\begin{cases} ax + by = -c \\ * - dy = f \end{cases}$

$$y = \frac{af}{-ad} = -\frac{f}{d}$$

$$x = \frac{bf - cd}{ad}$$

§. 114.

Wenn drey unbekannte Größen und drey Gleichungen sind; so bringt man sie unter diese Form:

$$ax + by + cz = m$$
$$dx + ey + fz = n$$
$$gx + hy + kz = p.$$

Den Werth von z zu finden, multiplicire man den Coeficienten von x in der ersten Gleichung durch den Coeficienten von y in der zweyten, und durch das gänzlich bekannte

Glied in der dritten. Multiplicire man ebenfalls den Coeficienten von x in der ersten Gleichung durch den Coeficienten von y in der dritten, und durch das gänzlich bekannte Glied der zweyten; ziehe man das zweyte Produkt von dem ersten ab. Man bekommt in diesem Exempel $aep - ahn$.

Multiplicire man den Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den Coeficienten von y in der dritten, und durch das gänzlich bekannte Glied der ersten: multiplicire man eben diesen Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den Coeficienten von y in der ersten, und durch das gänzlich bekannte Glied der dritten: ziehe man das zweyte Produkt vom ersten ab. Man bekommt in unserm Exempel $ahm - bdp$.

Multiplicire man den Coeficienten von x in der dritten Gleichung durch den Coeficienten von y in der ersten, und durch das gänzlich bekannte Glied der zweyten; multiplicire man eben diesen Coeficienten von x in der dritten Gleichung durch den Coeficienten von y in der zweyten, und durch das gänzlich bekannte Glied der ersten: ziehe man das zweyte Produkt von dem ersten ab. Man bekommt in unserm Exempel $gbn - gem$.

Die Summe aus allen diesen Produkten ist der Numerator eines Bruchs, der dem z gleich ist.

Den Nominator zu finden, multiplicire man den Coeficienten von x in der ersten durch den Coeficienten von y in der zweyten, und durch den Coeficienten von z in der dritten: multiplicire man eben diesen Coeficienten von x in der ersten durch den von y in der dritten, und durch den von z in der zweyten. Ziehe man das zweyte Produkt vom ersten ab. Man bekommt $aek - ahf$.

Multiplicire man den Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den von y in der dritten, und durch den von z in der ersten: multiplicire man eben diesen Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den von y in der ersten, und durch den von z in der dritten: ziehe man des zweyte Produkt vom ersten ab. Man bekommt $dhc - dbk$.

Multiplicire man den Coeficienten von x in der dritten Gleichung durch den von y in der ersten, und durch den von z in der zweyten: wie auch durch den von y in der der zweyten, und durch den von z in der ersten: ziehe man das zweyte Produkt vom ersten ab. Man bekommt $gbf - gec$.

Die Summe aller dieser Produkte ist der Denominator.

Den Werth von y zu finden, verfahre man eben auf die Art: ausgenommen, daß

man

man den Numerator zu finden, die Coeficienten von y niemal braucht, sondern an derer Statt die Coeficienten von z. Der Denominator ist vollkommen der nämliche, aber mit Veränderung aller Zeichen.

Den Werth von x zu finden, verfahre man wieder auf gleiche Art, ausgenommen, daß man den Numerator zu finden die Coeficienten von x niemals brauchen muß: der Denominator ist vollkommen der nämliche, den man für den Werth von z gefunden hat. Es wird in diesem Exempel seyn:

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$$

$$y = \frac{afp - akn + dkm - dcp + gcn - gfm}{-aek + ahf - dhc + dbk - gbf + gec}$$

$$x = \frac{bfp - bkn + ekm - ecp + hcn - hfm}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec.}$$

So weitläuftig und dunkel nun diese Regel immer scheinen mag, so ist sie doch in der Ausübung leicht, und kürzt die Arbeit insgemein sehr viel ab: sie kann aber leichter durch die Uebung erlernet, als mit Worten erklärt werden.

Exempel.

Es sey
$$\begin{cases} 2x+3y+z=14 \\ x+2y-z=7 \\ -2x-y+z=-6 \end{cases}$$

$$z=\frac{-24+14-14+18-42+56}{4-2-1-3+6+4}=\frac{8}{8}=1$$

$$y=\frac{12-14+14+6-14-28}{-8}=\frac{-24}{-8}=3$$

$$x=\frac{18-21+28+12-7-14}{8}=\frac{16}{8}=2$$

alles wie oben.

Zweytes Exempel.

Es sey
$$\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ x+z=c \end{cases}$$

Schreibe man diese Gleichungen also an;
$$x+y^{*}=a$$
$$^{*}+y+z=b$$
$$x^{*}+z=c$$

$$z-\frac{c+b-a}{1+1}=\frac{c+b-a}{2}$$ wie oben.

$$y=\frac{c-b-a}{-2}=\frac{b+a-c}{2}$$ wie oben.

$$x=\frac{c-b+a}{2},$$ wie oben.

Neunter Abschnitt.

Wie die algebraischen Gleichungen zu finden sind.

§. 115.

Eine jede Gleichung muß durch die Bedingnisse, welche die Aufgabe bey sich hat, aufgelöset werden. Aus diesen Bedingnissen müssen so viele Gleichungen herausgezogen werden, als viele unbekannte, von einander unabhängige Größen in der Aufgabe sind; kann man so viele finden, so ist die Aufgabe bestimmt, das ist, es giebt nur einen Werth, oder doch nur eine bestimmte Anzahl der Werthe für jede unbekannte Größe: kann man aber aus allen gegebenen Bedingnissen nicht so viele Gleichungen finden, als unbekannte, von einander unabhängige Größen in der Aufgabe sind, so ist diese Aufgabe unbestimmt: das ist, jede unbekannte Größe kann unendlich viele verschiedene Werthe haben, durch welche alle den gegebenen Bedingnissen ein Genüge geschieht.

§. 116.

Wie die Gleichungen aus den Bedingnissen der Aufgabe herzuleiten sind, ist oft sehr schwer: man kann auch hiezu keine hinlängliche Regeln vorschreiben. Ein aufgeklär-

ter Verstand und die Uebung muß hierinn das Beste thun. Man merke nur folgendes.

Erstens: Muß man die Aufgabe wohl verstehen, das, was gefragt wird, von dem, was bekannt, wohl unterscheiden: die unbekannten Größen durch die letzten Buchstaben des Alphabets *x*, *y*, *z*, die bekannten aber durch die ersten *a*, *b*, *c* benennen.

Zweytens: Muß man alles, was in der Aufgabe überflüßig ist, und nichts zur Sache thut, außer Acht lassen, und die Gedanken nur auf die Größen selbst, und die Verhältnisse derselben richten.

Drittens: Wenn die Benennung aller Größen geschehen ist, muß man alle Bedingnisse der Aufgabe aufmerksam durchgehen, und eine jede derselben algebraisch ausdrücken.

Viertens: Muß man sich hüten, daß man die Anzahl der unbekannten Größen nicht ohne Noth vermehre. Also, wenn man eine Größe, die man sucht, *x* genennt hat, und wenn man noch eine andere sucht, die aber das Doppelte, oder das Dreyfache der vorigen seyn soll, so muß man sie nicht durch *z* oder *y*, sondern mit $2x$, oder $3x$ benennen. Zum Exempel.

1) Man

1) Man soll eine Summe Geldes von 4000 Gulden also unter vier Personen theilen, daß die zweyte um 60 mehr bekomme, als die erste: die dritte um 70 mehr, als die zweyte: die vierte um 80 mehr, als die dritte.

Wenn man diese Aufgabe wohl betrachtet, so sieht man alsogleich, daß, wenn der Theil, was immer für Eines aus diesen vier Menschen bekannt wäre, man also gleich die Theile der Andern daraus herleiten könnte. Wenn z. Ex. der Theil des ersten bekannt wäre, dürfte man nur 60 zu demselben addiren, um den Theil des zweyten zu bekommen: und wenn man zu diesem 70 setzt, so entstünde der Theil des dritten: und wenn man abermal zu diesem 80 addirt, so wäre die Summe der Theil des vierten. Es hangen also alle vier Größen, die man sucht, von einander ab, und ist folglich nur eine unbekannte Größe in der Aufgabe, und eben darum nur eine Gleichung zu finden nothwendig.

Nachdem man die Sache also bedacht hat, schreite man zu der Benennung. Man benenne einen aus den vier Theilen, etwa den ersten, x. Die bekannten Größen der Aufgabe sind diese, 4000, 60, 70, 80: benenne diese mit den ersten Buchstaben des Alphabets, und setze man a anstatt 4000, b anstatt 60, c anstatt 70, d anstatt 80. Nun durchgehe

gehe man alle Bedingnisse, und drücke man eine jede also gleich algebraisch aus. Man wird etwa also schließen:

Der erste Theil sey : : : x

Der zweyte muß um 60, oder um b größer seyn, als der erste: er wird also seyn : : : : : : $x + b$

Der Theil des dritten muß um 70 oder c größer seyn, als der des zweyten: der Theil des dritten ist also : $x + b + c$

Der Theil des vierten muß um 80 oder um d größer seyn, als jener des dritten: Er wird also seyn $x + b + c + d$

Die Summe aller dieser vier Theile muß 4000 oder a ausmachen. Ich habe also diese Gleichung $4x + 3b + 2c + d = a$.

Wenn man diese Gleichung nach den Regeln, die oben gegeben worden, auflöset, so findet man $x = \frac{a - 3b - 2c - d}{4}$: und wenn man für die Buchstaben wieder ihre Zahlen setzt, so hat man

$$x = \frac{4000 - 180 - 140 - 80}{4} \text{ folglich}$$

$$x = \frac{4000 - 400}{4} = \frac{3600}{4} = 900.$$

Nun

Nun ist nichts leichters, als die Theile der übrigen zu finden.

$x = 900$ der Theil des ersten.
$+ 60$

960 der Theil des zweyten.
$+ 70$

1030 der Theil des dritten.
$+ 80$

1110 der Theil des vierten.

Wenn man diese vier Theile zusammen addirt, so ist die Summe 4000, wie es die Aufgabe verlangt, welches dann ein sicherer Beweis ist, daß die verlangten vier Theile richtig sind gefunden worden.

2) Man soll vier Zahlen finden, deren Summe 33000 ausmache. Die zweyte Zahl aber zweymal so groß, als die erste: die dritte dreymal so groß seyn, als die zweyte: die vierte viermal so groß, als die dritte.

Nenne man die erste Zahl : : x

Die zweyte muß zweymal so groß seyn. Also sie ist : : : $2x$

Die dritte muß dreymal so groß seyn als die zweyte. Sie ist also : : $6x$

Die

Die vierte muß viermal so groß seyn als die dritte: folglich ist sie : : : $24x$

Die Summe aus allen vieren ist 33000: es entsteht also die Gleichung $33x = 33000$.

Die Auflösung dieser Gleichung giebt

$x = 1000$ die erste Zahl
$\times 2$
2000 die zweyte
$\times 3$
6000 die dritte
$\times 4$
24000

Die Summe aller vier ist 33000, wie es verlangt wurde.

3) Man soll drey Zahlen finden, derer Summe 360 (a) ausmacht, und welche überdas so beschaffen sind, daß, wenn die zweyte Zahl durch die erste dividirt wird, der Quotient 5 (b) sey; wenn aber die dritte durch die zweyte dividirt wird, der Quotient 6 (c) entstehe.

Nenne man die erste aus den gesuchten Zahlen : : : x
Die zweyte : : y
Die dritte : : z.

Weil

Weil alle drey zusammen 360 (a) ausmachen, so hat man diese erste Gleichung. : : : $x+y+z=a$

Weil die zweyte durch die zweyte dividirt b zum Quotienten giebt: so entsteht diese Gleichung : : $\frac{y}{x}=b$.

Weil die dritte durch die zweyte dividirt c zum Quotienten giebt; so ist $\frac{z}{y}=c$

Man hat also gleichwie drey unbekannte Größen, also auch drey Gleichungen: die Aufgabe ist also bestimmt.

Die Auflösung giebt $z=\frac{abc}{1+b+bc}=300$

$$y=\frac{b}{1+b+bc}=50$$

$$x=\frac{a}{1+b+bc}=10$$

Nun ist die Summe dieser drey Zahlen 360. Zweytens: die zweyte Zahl 50 durch die erste 10 dividirt, giebt 5 zum Quotienten: Drittens: die dritte Zahl 300 durch die zweyte 50 dividirt, giebt 6 zum Quotienten: alles, wie es die Bedingnisse der Aufgabe erfordern.

Estre Anmerkung. Weil die Auflösung immer weitläuftiger wird, je mehr unbekannte Größen darinn vorkommen, so kann man diese Aufgabe etwas leichter auflösen, wenn man also folgern würde.

Die erste aus den dreyen gesuchten Zahlen sey : : : : : x

Die zweyte : : : : y

Die dritte ist nicht nöthig durch einen neuen Buchstaben zu benennen. Denn, weil die Summe aller drey a gleich seyn muß, so muß die dritte der Rest seyn, welcher überbleibt, wenn die erste und zweyte von der Summe abgezogen wird.

Die dritte kann also heißen $a - x - y$

Nun giebt die zweyte durch die erste dividirt, b zum Quotienten, also ist $\frac{y}{x} = b$

Die dritte durch die zweyte dividirt, giebt c zum Quotienten, folglich ist

$$\frac{a - x - y}{y} = c$$

So hat man dann, gleichwie zwo unbekannte Größen, also auch zwo Gleichungen. Man kann hiemit die gesuchte Zahlen finden. Die Auflösung giebt

$x =$

$$\left.\begin{array}{r} x = \dfrac{a}{bc+b+1} = 10 \\ y = \dfrac{ba}{bc+b+1} = 50 \\ a-x-y = 360-50-10 = 300 \end{array}\right\}$$ alles wie zuvor.

Aus diesem sieht man, daß man zuweilen eine in der Aufgabe gesetzte Bedingniß entweder brauchen könne, eine Gleichung zu finden, oder die Benennung also zu machen, daß eine unbekannte Größe ersparet werde.

Zweyte Anmerkung. Ja man kann eben diese Aufgabe also auflösen, daß nur eine unbekannte Größe in die Auflösung komme, wenn man sich nur eines Grundsatzes, der in der Arithmetik ist erwiesen worden, erinnern will. Denn man kann also folgern:

Die erste aus den gesuchten dreyen Zahlen soll heißen. : : : x

Die zweyte durch die erste dividirt muß 5 (b) zum Quotienten geben: weil also der Divisor durch den Quotienten multiplicirt, den Dividendus hervorbringt, so muß die zweyte aus den gesuchten Zahlen seyn : : : : : bx

Die dritte durch die zweyte dividirt, muß 6 (c) zum Quotienten geben. Also muß die dritte seyn : : : bcx

Alle drey zusammen müssen 36 (a) ausmachen: man hat also diese Gleichung : : : $x + bx + bx = a$

Hieraus entsteht

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{a}{1+b+bc} = 10 \text{ die erste} \\ bx = \dfrac{ab}{1+b+bc} = 50 \text{ die zweyte} \\ bcx = \dfrac{abc}{1+b+bc} = 300 \text{ die dritte} \end{array}\right\} \text{alles wie zuvor.}$$

4) Ein Student ist dem Müßiggange ziemlich ergeben. Sein Vater will ihn zum Studieren antreiben, er legt ihm etwas zu erlernen vor, und macht zugleich folgenden Vertrag mit ihm. Für jeden Tag, den er fleißig zum Studieren angewendet haben werde, wolle er ihm 5 Gulden zur Belohnung geben. Für jeden hingegen, den er mit Müßiggehen verzehren würde, müsse er ihm 4 Gulden zur Strafe bezahlen. Nach 72 Tagen hat der Jüngling das ihm Vorgelegte erlernet, und begehrt dafür den versprochenen Lohn: der Vater hält die Tage, die er gearbeitet, gegen denen, die er im Müßiggange hat verstreichen lassen, und zeigt ihm, daß er ihm gar nichts schuldig sey, und auch nichts von ihm zu fordern habe. Nun fragt man: wie viele Tage

er

er studirt, und wie viele er mit Müßiggange zugebracht habe?

Man wird also folgern:

Die Tage der Arbeit sollen heißen : x

Die Tage des Müßiggangs werden also heißen : : : : $72 - x$

Für einen Tag der Arbeit hat er 5 Gulden zu fordern. Man muß also die Tage der Arbeit durch 5 multipliciren, damit man jene Summe erhalte, die er von dem Vater für seine Arbeit zu fordern hat. Diese Summe ist also : $5x$

Für einen Tag des Müßiggangs muß er 4 Gulden Strafe bezahlen. Man muß also $72 - x$ die Tage des Müßiggangs mit 4 multipliciren, so bekommt man die Summe, die er dem Vater zurück zu bezahlen schuldig ist. Diese ist also : : $72 - x \times 4$ oder $288 - 4x$

Nun aber ist weder der Vater dem Sohne, noch der Sohn dem Vater etwas schuldig. Der Lohn für die Arbeit muß also der Strafe für den Müßiggang gleich seyn. Folglich ist $5x = 288 - 4x$

Die Auflösung giebt : : $x = 32$ die Tage der Arbeit.

Dieses von 72 abgezogen giebt : 40
die Tage des Müßiggangs.

Und in der That 32 Tage der Arbeit, jeden für 5 Gulden angeschlagen, verdienen 160 Gulden: 40 Tage des Müßiggangs jeden zu 4 Gulden Strafe gerechnet, machen abermal 160 Gulden: die Strafe hebt also die Belohnung auf, der Sohn hat vom Vater, und dieser vom Sohne nichts zu fodern.

5) Ein Hauptmann hat mit seinem untergebenen Kommando eine Beute erobert: er will sie unter seine Soldaten austheilen. Wenn er jedem 5 Gulden geben wollte, so erklecket die Beute nicht, es gehen ihm 300 Gulden ab. Giebt er aber jedem nur 4 Gulden, so bleiben ihm 200 Gulden übrig. Wie viel waren es Soldaten, und wie groß die Beute?

Man folgere also:

Die Anzahl der Soldaten sey : x

Wenn er jedem 5 Gulden gäbe, so würde sich die ganze Ausgabe auf so vielmal 5 Gulden belaufen, als viele Soldaten sind, nämlich auf $5x$. Nun aber ist die Beute um 300 Gulden zu klein. Die Beute ist also : : $5x - 300$

Giebt

Giebt er jedem Soldaten nur 4 Gulden, so beläuft sich die Ausgabe auf $4x$: es bleiben ihm aber alsdenn 200 Gulden von der Beute über. Die ganze Beute ist also : : : : $5x - 200$

Weil nun der erste Ausdruck $4x + 200$ die Beute ausdruckt, und der zweyte Ausdruck $4x + 200$ eben diese Beute anzeigt, so müssen diese zween Ausdrücke einander gleich seyn. Man hat also diese Gleichung : $5x - 300 = 4x + 200$

Die Auflösung giebt : $x = 500$.

Es waren also 500 Soldaten. Multiplicirt man diese mit 5, so ist das Produkt 2500, zieht man 300 davon ab, so ist der Rest 2200 Gulden die Größe der Beute. Multiplicirt man gemäß der zweyten Bedingniß die Anzahl x der Soldaten mit 4, so ist das Produkt 2000: addirt man 200 dazu, so ist die Summe 2200 Gulden abermal die Größe der Beute. Und weil diese beyderseits gefundene Summe die nämliche ist, so erkennt man, daß die Auflösung richtig sey.

Erste Anmerkung. In diesem Exempel sieht man, daß es zuweilen, um eine Gleichung zu finden, nothwendig ist, die nämliche Sache auf zweyerley Arten auszudrücken, welche zween Ausdrücke der nämlichen Sache alsdenn einander nothwendig gleich seyn müs-

sen. Also hat man in gegenwärtigem Exempel zween Ausdrücke der Beute gesucht: und diese beyden alsdenn mit einander verglichen.

Zweyte Anmerkung. Wenn man in gegenwärtiger Aufgabe, anstatt der bekannten Größen Buchstaben des Alphabets, etwa a anstatt 5, b anstatt 4, p anstatt 300, q anstatt 200 gesetzt hätte; so würde die Gleichung also gestanden seyn : $ax - p = bx + q$.

Die Auflösung hätte gegeben $x = \frac{p+q}{a-b}$

Nun diese mit Buchstaben gemachte Auflösung wäre allgemein, und würde immer dienen, man möchte die in der Aufgabe gegebenen Zahlen ändern, wie man wollte. Ja, man kann aus dieser allgemeinen Auflösung eine allgemeine Regel für die Beantwortung aller dergleichen Fragen herleiten. Die Regel würde diese seyn. Die Anzahl derer, unter welche die Austheilung geschehen muß, ist allezeit gleich der Summe aus dem Abgange bey der ersten, und aus dem Ueberflusse bey der zweyten Austheilung, dividire man durch die Differenz zwischen den Zahlen, welche in beyden Theilungen für einen jeden bestimmt sind. Und wenn also diese Differenz 1 ist, so ist die Anzahl, unter welche die Austheilung geschehen muß, gleich der besagten Summe.

6) Ein Wasserbehältniß faßt 800 (a) Eymer. Aus dreyen Röhren fließt Wasser darein. Das erste, wenn es allein laufen sollte, würde in 3 (b) Tagen das Behältniß anfüllen: das zweyte in 4 (c) Tagen: das dritte in 6 (d) Tagen. Wie bald wird das Behältniß voll seyn, wenn alle drey zugleich laufen?

Man nenne die Zahl, die man sucht x

Nun folgere man also. Das erste Rohr giebt in b Tagen das Wasser a: wie viel giebt es in der Zeit x? Man findet nach der Regel der Proportion : : $\frac{ax}{b}$

Das zweyte Rohr giebt in der Zeit c das Wasser a: was giebt es in der Zeit x? Man findet : : : $\frac{ax}{c}$

Das dritte Rohr giebt in der Zeit d das Wasser a, was giebt es in der Zeit x? Man findet : : : : $\frac{ax}{d}$

Nun muß das Wasser, welches in der Zeit x aus allen dreyen Rohren zugleich fließt, das Behältniß anfüllen, und also die Eymer a ausmachen. Man hat also diese Gleichung : $\frac{ax}{b} + \frac{ax}{c} + \frac{ax}{d} = a$

Die Auflösung giebt

$$x = \frac{abcd}{acd+abd+abc} = \frac{bcd}{cd+bd+bc} = \frac{3\times4\times6}{24+18+12}$$

$$= \frac{72}{54} = 1\tfrac{1}{3}.$$

7) Als einer gefragt wurde, wie viel es auf der Uhr wäre, antwortete er: der Stundenzeiger stehe zwischen 4 und 5 Uhr, der Minutenzeiger aber stehe genau ober dem Stundenzeiger. Wie viele Minuten war es über 4 Uhr?

Man nenne die Anzahl dieser Minuten x und folgere also: Da es genau 4 Uhr war, gieng der Stundenzeiger von der vierten, der Minutenzeiger von der zwölften Stunde weg. Nun ist es klar, daß der Minutenzeiger, bis er den Stundenzeiger erreicht, den Raum, welcher zwischen der zwölften und vierten Stunde liegt, durchlaufen muß, und noch überdas jenen Raum, welchen der Stundenzeiger in der Zeit x durchlauft. Wenn man den Raum, der zwischen der zwölften und vierten Stunde liegt, in dem in Minuten eingetheilten Zirkel nimmt, so sind es 20 (a) Minuten. Innerhalb 60 Minuten der Zeit durchlauft der Stundenzeiger 5 Minuten eben desselben Zirkels: wie viel durchlauft er also in der Zeit x? Man findet $\frac{5x}{60}$ oder $\frac{x}{12}$: $a + \frac{x}{12}$ ist

ist also der ganze Raum, den der Minutenzeiger zu durchlaufen hat, bis er den Stundenzeiger erreicht.

Ferner ist bekannt, daß der Minutenzeiger in 60 Minuten der Zeit 60 Minuten seines Cirkels durchlauft: wieviel durchlauft er also in der Zeit x? Man findet x. Eben dieses x ist also abermal der Raum, den der Minutenzeiger durchlaufen muß, bis er den Stundenzeiger erreicht. Man hat also diese Glei-

chung $a + \frac{x}{12} = x$

und folglich $x = \frac{12a}{11} = \frac{140}{11} = 21\frac{9}{11}$.

Es war also 21 Minuten und $\frac{9}{11}$ einer Minute über 4 Uhr.

Weil die ganze Rechnung vollkommen die nämliche bleibt, für was immer für eine Stunde, so kann man gar leicht finden, um was für eine Minute, nach was immer für einer Stunde der Stundenzeiger den Minutenzeiger erreicht. Man darf nur in der gefundenen Formel anstatt a die gehörige Anzahl der Minuten setzen.

8) Ein Vater sagte zu seinem Sohne: das Geld, das ich in meiner Hand verschlossen halte, soll dein seyn, wenn du mir durch

die

die Rechnung bestimmest, wie viel es Kreuzer sind. Nun merke: Wenn du die Zahl der Kreuzer, die ich halte, halb nimmst, und über das den dritten und den siebenten Theil derselben, so kommt eine Summe heraus, die um 1 kleiner ist, als die Zahl der Kreuzer, die in meiner Hand sind.

Die Zahl der Kreuzer sey : : x

Die Hälfte wird : : : $\frac{x}{2}$

Der dritte Theil : : : $\frac{x}{3}$

Der siebente : : : : $\frac{x}{7}$

Nun diese drey Brüche zusammen, müssen der Zahl x gleich seyn weniger 1. Man hat also diese Gleichung:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{7} = x - 1.$$

Also ist $x = 42$ die Anzahl der Kreuzer.

9) Einige Studenten gehen in ein Wirthhaus, und lassen sich wohl auftragen. Die Zeche macht 3 Gulden und 12 Groschen, oder 72 Groschen. Zween werden von den übrigen zechfrey gehalten. Nun

Nun muß ein jeder um 3 Groschen mehr bezahlen, als er hätte zahlen müssen, wenn alle an der Zeche gleich Theil genommen hätten. Wie viel waren es Studenten? Was mußte einer bezahlen?

Die Zahl der Studenten sey : : : x

Die Zahl derer, die bezahlen, wird seyn : : : : : : : : : $x - 2$

Wenn alle bezahlt hätten, so hätte Einem getroffen : : : : : : : $\frac{72}{x}$

Nun aber trifft jedem : : : : $\frac{72}{x-2}$

Dieses letzte ist um 3 größer, als das vorgehende; also ist:

$$\frac{72}{x-2} = \frac{72}{x} + 3$$

$$72x = 72x - 144 + 3x^2 - 6x$$
$$3x^2 - 6x = 144$$
$$x^2 - 2x = 48$$
$$x^2 - 2x + 1 = 48 + 1 = 49$$
$$x - 1 = \pm\sqrt{49} = \pm 7$$
$$x = 1 \pm 7 = 8 \text{ oder auch } -6.$$

Es waren also 8 Studenten: 6 zahlten die Zeche: es traf also einem jeden $\frac{72}{6}$ oder 12

Groschen. Hätten alle acht bezahlt, so hätte einem getroffen $\frac{72}{8}$, das ist, 9 Groschen. Nun ist ja 12 um 3 größer als 9; wie es die Aufgabe erfordert. Die negative Wurzel kann man in dieser Aufgabe nicht brauchen.

10) In dem Jahre 1772 war ein Vater 50 (a), sein Sohn 21 (b) Jahre alt. Nun fragt man, in was für einem Jahre dieses laufenden Jahrhunderts wird der Vater eben noch so alt, als der Sohn seyn?

Die Zahl der Jahre, welche beyde noch leben müssen, bis der Vater noch so alt als der Sohn ist, nenne man : : : : : x

Wenn diese Jahre x verstrichen sind, so wird der Vater $a+x$ Jahre, der Sohn $b+x$ Jahre alt seyn. Nun ist der Vater alsdenn eben noch so alt als der Sohn. Also ist

$$a + x = b + x \times 2 = 2b - + 2x$$
$$2x - x - a = 2b$$
$$x = a = 2b - 50 - 42 = 8.$$

Sie müssen also beyde noch acht Jahre leben. Also wird im Jahre 1780 der Vater noch so alt als der Sohn seyn. In der That, der Vater wird dazumal 58, der Sohn 29 Jahre haben. Nun aber ist $58 = 29 \times 2$. Die allgemeine Auflösung zeigt, daß in all dergleichen Aufgaben das Alter des Sohns

müsse

müsse doppelt genommen, und alsdenn von dem Alter des Vaters abgezogen werden. Wenn dieses doppelte größer wäre, als das Alter des Vaters, so würde der Werth von x negativ werden. Welches dann eine Anzeige wäre, daß jene Zeit, da der Vater noch so alt als der Sohn war, schon verstrichen sey, und nicht erst kommen werde, und zwar um so viele Jahre, als der negative Werth von x Einheiten hat. Z. Ex. wenn man setzte, der Vater sey in dem Jahre 1772, 50 Jahre, der Sohn aber 26 Jahre alt gewesen; so gäbe die allgemeine Formel $x = a - 2b = 50 - 52 = -2$. Der Vater war also zwey Jahre zuvor, nämlich im Jahre 1770 noch so alt, als sein Sohn.

11) Ein Wirth hat zweyerley Wein. Eine Maß des bessern verkauft er um 10 (a) Kreuzer: eine Maß des schlechtern um 6 (b) Kreuzer. Er will beyde unter einander mischen, also, daß die Mischung 2400 (m) Maße ausmache, und eine Maß 7 (c) Kreuzer werth sey. Wie viel muß er von dem bessern, wie viel von dem schlechtern nehmen?

Die Anzahl der Maße des bessern sey x

Des schlechtern : : : : : $m - x$

Eine Maß des bessern gilt a Kreuzer: weil also x die Anzahl der Maße dieses

Weins ist; so muß ax den Werth alles bessern Weins, der in die Mischung kommt, ausdrücken.

Aus gleicher Ursache muß $bm - bx$ den Werth alles schlechtern Weins, der in die Mischung kömmt, ausdrücken. Folglich ist der Werth der ganzen Mischung $ax + bm - bx$.

Nun sind die Maße der Mischung m: der Werth einer Maß ist c: also ist cm abermal der Werth der ganzen Mischung.

Nun steht diese Gleichung also:

$$ax + bm - bx = cm.$$

Die Auflösung giebt

$$x = \frac{cm - bm}{a - b} = 600$$ Die Anzahl der Maße des bessern Weins.

Von dem schlechtern Weine muß genommen werden $m - x$, das ist, $m \frac{-cm + bm}{a - b}$.

Wenn man dieses unter einen Nenner bringt, so hat man $\frac{am - bm - cm + bm}{a - b}$ oder

$$\frac{am - cm}{a - b} = 1800.$$

Erste Anmerkung. Die allgemeine in Buchstaben gemachte Auflösung giebt eine Regel an die Hand, alle dergleichen Aufgaben aufzulösen. Die Formel für den bessern Wein war $\frac{cm - bm}{a - b}$ oder $\frac{c - b \times m}{a - b}$. Man muß also,

um die Anzahl der Maße des bessern zu bekommen, die Differenz zwischen dem mittlern und geringern Werthe nehmen, selbe mit der Anzahl der Maße der ganzen Mischung multipliciren: und dieses Produkt durch die Differenz der Werthe des bessern und schlechtern dividiren. Die Formel für den schlechtern Wein war $\frac{am - cm}{a - b}$ oder $\frac{a - c \times m}{a - b}$.

Man muß also, um die Anzahl der Maße des schlechtern zu bekommen, die Differenz zwischen dem Werthe des bessern und des mittlern nehmen; diese mit der Anzahl der Maße der ganzen Mischung multipliciren; das Produkt durch die Differenz der Werthe des bessern und des schlechtern dividiren.

Zweyte Anmerkung. Wenn man keine gewisse Maß giebt, welche die ganze Mischung haben soll, sondern nur fragt, in was für einem Verhältnisse beyde Dinge müssen vermischet werden, damit eine gewisse Maß der Mischung den gegebenen Werth bekomme, so können eben die vorigen Formeln dienen. Die Anzahl der Maße der bessern Sache muß sich zu der Anzahl der Maße der schlechtern verhalten, wie $\frac{cm - bm}{a - b}$ zu $\frac{am - cm}{a - b}$ und weil in diesen beyden Ausdrücken der Nenner beyderseits der nämliche ist, so kann er weggelassen werden, ohne hiedurch das Ver-

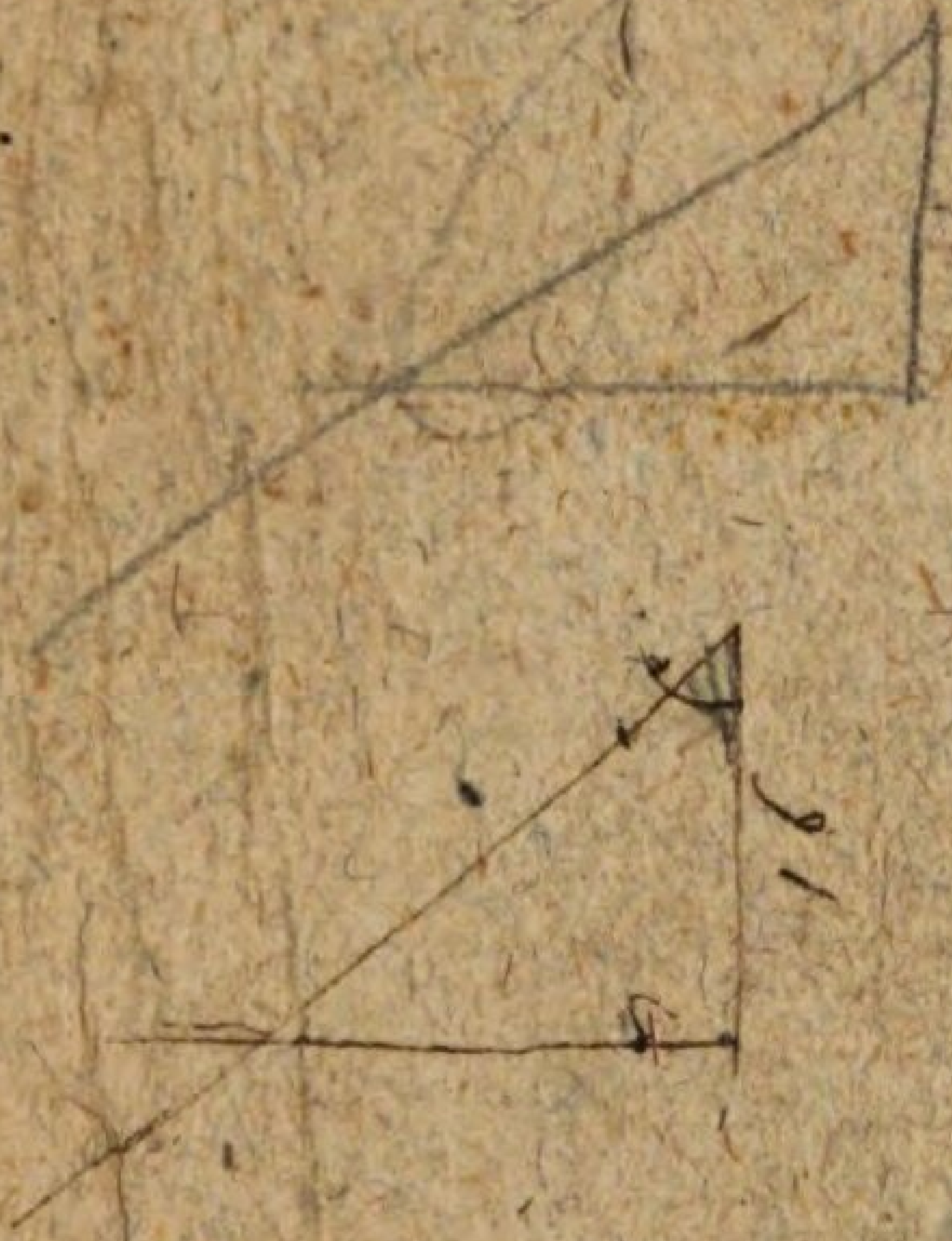
hältniß

hältniß zu ändern; ja auch der Factor m, weil er beyden Ausdrücken gemein ist, kann ausgelassen werden. Die Maße des bessern müssen sich also verhalten zu den Maßen des schlechtern, wie $c - b$ zu $a - c$.

Dritte Anmerkung. Wenn man unter den Wein anstatt eines schlechtern Weins Wasser mischen wollte, könnten eben die oben gefundenen allgemeinen Formeln dienen, allein mit diesem Unterschiede, daß b gleich a wäre, und also jene Theile, welche das b in sich haben, wegfielen. Die Formel für den bessern Wein $\frac{cm - bm}{a - b}$ würde also in diese verwandelt werden $\frac{cm}{a}$. Die Formel für das Wasser $\frac{am - cm}{a - b}$ in diese $\frac{am - cm}{a}$.

Ende des zweyten und letzten Theils.

Bayerische Staatsbibliothek München



[illegible]

[illegible]

Daniel [illegible]

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Spengler, Joseph

Joseph Spenglers ... erste Gründe der Arithmetik und Algebra

Augsburg 1809

Math.p. 744
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083356-7